Matematičke metode fizike

Il est aisé à voir

Ivica Smolić

2019 | Svibanj | 19

Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet

Sadržaj

Predgovor **vii**

0 Uvod **1**
0.1 Skupovi . . . 1
0.2 Relacije . . . 4
0.3 Preslikavanja . . . 7
0.4 Algebarske strukture . . . 10
0.5 Skup realnih brojeva . . . 11
0.6 Topološki prostori . . . 13
0.7 Dijelovi skupova . . . 17
0.8 Povezanost i kompaktnost . . . 21
0.9 Nizovi i redovi realnih brojeva . . . 23
0.10 Neprekidna preslikavanja . . . 28
0.11 Realna analiza, ukratko . . . 32

1 Kompleksna analiza **37**
1.1 Polje kompleksnih brojeva . . . 37
1.2 Kompleksna ravnina . . . 39
1.3 Kompleksne funkcije . . . 41
1.4 Krivulje u kompleksnoj ravnini . . . 46
1.5 Riemannove plohe . . . 48
1.6 Nizovi i redovi u $\mathbb{C}$ . . . 50
1.7 Neprekidnost i derivabilnost kompleksnih funkcija . . . 59
1.8 Integracija kompleksnih funkcija . . . 67
1.9 Laurentov razvoj . . . 81
1.10 Singulariteti i reziduumi . . . 84
1.11 Sumiranje redova pomoću kompleksnih integrala . . . 87

2 Gama, beta, zeta **89**
2.1 Gama funkcija . . . 89
2.2 Beta funkcija . . . 103
2.3 Riemannova zeta funkcija . . . 105

3 Aproksimacije funkcija **111**
3.1 Kvantificiranje približnog . . . 111
3.2 Divergiranje nije nužno loše . . . 113
3.3 Asimptotski razvoji . . . 114

4 Obične diferencijalne jednadžbe 119
4.1 Klasifikacija ODJ . . . 120
4.2 Linearne ODJ prvog reda . . . 122
4.3 Linearne ODJ višeg reda . . . 127
4.4 Frobeniusova metoda . . . 137
4.5 Hipergeometrijska diferencijalna jednadžba . . . 143
4.6 Sustavi linearnih ODJ . . . 149

5 Fourierov red 157
5.1 Kratak uvod u teoriju mjere . . . 159
5.2 Unitarni prostori . . . 163
5.3 Kvadratno integrabilne funkcije . . . 166
5.4 Norma na unitarnom prostoru . . . 170
5.5 Ortonormirani skupovi vektora . . . 171
5.6 Aproksimiranje vektora . . . 174
5.7 Parcijalni Fourierov red . . . 176
5.8 Potpunost . . . 179
5.9 Usporedba tri tipa konvergencije . . . 184
5.10 Konvergencija Fourierovog reda . . . 186
5.11 Sumiranje redova pomoću Fourierovog reda . . . 192
5.12 Poissonova sumacijska formula . . . 193

6 Fourierov transformat 197
6.1 Osnovna svojstva Fourierovog transformata . . . 198
6.2 Princip neodređenosti . . . 205
6.3 Konvolucija . . . 208
6.4 Delta funkcija i distribucije . . . 212
6.5 Ostale integralne transformacije . . . 222

7 Parcijalne diferencijalne jednadžbe 223
7.1 Fizikalna pozadina osnovnih PDJ . . . 223
7.2 Klasifikacija PDJ . . . 226
7.3 PDJ prvog reda . . . 229
7.4 Metoda karakteristika . . . 230
7.5 Kanonska forma PDJ drugog reda . . . 233
7.6 Poissonova i Laplaceova jednadžba . . . 235
7.7 Toplinska jednadžba . . . 240
7.8 Valna jednadžba . . . 246
7.9 Maxwellove jednadžbe . . . 252

8 Greenove funkcije 255
8.1 Greenove funkcije i ODJ . . . 255
8.2 Kramers-Kronigove relacije . . . 263
8.3 Greenove funkcije i PDJ . . . 264

9 Specijalne funkcije 273
9.1 Separacija u sfernom koordinatnom sustavu . . . 274
9.2 Separacija u cilindričnom koordinatnom sustavu . . . 277
9.3 Legendreovi polinomi i kugline funkcije . . . 278
9.4 Besselove i Neumannove funkcije . . . 291

9.5 Sturm-Liouvilleov problem 302

10 Varijacijski račun **305**
10.1 Brahistohrona 307
10.2 Opne od sapunice 308
10.3 Varijacije s ograničenjima 310
10.4 Lančanica 311
10.5 Izoperimetrijski problem 312
10.6 Problem maksimalnog polja 314
10.7 Varijacijski problemi s više funkcija i više varijabli 315
10.8 Geodezici 316
10.9 Maxwell-Boltzmannova raspodjela 317

Dodaci **319**

A Konvencije i ostalo **321**

B Testovi konvergencije **323**

C Nejednakosti **325**

D Jordanova forma matrice **327**

E Eksponenciranje matrica **329**

F Bernoullijevi brojevi i polinomi **335**

G Potpunost prostora L^p **339**

H Nabla i sve to **341**

I Simetrični polinomi **347**

J Lambertova W funkcija **351**

Predgovor

Kada sam 2013. godine u ljetnom semestru preuzeo vođenje kolegija "Matematičke metode fizike" na Fizičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, glavni problem preda mnom bio je osjetan nedostatak adekvatne literature. Izuzev nepotpunih i nesređenih studentskih bilješki, nisu postojale nijedne druge koje bi nosile obilježje "službenih". Domaća literatura koju bi bar donekle mogli gledati kao pokušaj sustavnog izlaganja matematičkih metoda korisnih u fizici svodi se tek na dva "slova", Blanušinu knjižicu *Odabrana predavanja iz Matematičkih metoda fizike* (u potpunosti zastarjela i ni iz bliza dostatna) te možda neki dijelovi Supekovog dvotomnog udžbenika *Teorijska fizika*. S druge strane, situacija je očekivano znatno bolja na engleskom jeziku, naizgled s obiljem naslova s "predznakom MMF-a". Međutim, pažljivija analiza ovih knjiga opet otkriva niz nedostataka, među kojima prednjače oni pedagoškog karaktera. Ugrubo, nedostatke možemo razvrstati prema narednim tipovima izvora

(a) knjige koje su isključivo "matematičke" (iako su neke izvrsno napisane, u potpunosti im nedostaje fizikalna spona, a često su i preuske u izboru tematike);

(b) knjige koje su zastarjele, bilo zbog stila izlaganja, bilo zbog (opet) preuske tematike;

(c) knjige koje su više enciklopedijskog karaktera, idu u širinu, a premalo u dubinu materije.

Kao prirodno rješenje nametnulo se pisanje nove knjige koja bi izbjegla ove nedostatke i poslužila kao standardna referenca na hrvatskom jeziku za ovaj kolegij. Tekst koji upravo čitate je revidirana, dijelom dopunjena verzija ranije skripte. Ipak, i pred ovom verzijom, koja je nesumnjivo protkana matematičkim i pravopisnim pogreškama, je trnovit proces dorade na putu ka čitkom, probavljivom udžbeniku.

Ovom prilikom se želim zahvaliti svima onima koji su svojim primjedbama i savjetima pomogli u ispravljanju i poboljšavanju ranijih verzija skripte, abecednim redom, Hrvoju Abrahamu, Sanjinu Beniću, Antoniju Bjelčiću, Tajronu Juriću, Brunu Klajnu, Augustinu Oreškoviću, Ivani Retkovac Šešelji i Leonu Tiški.

Addendum. Kratak vodič kroz literaturu.

Udžbenik: knjiga namjenjena detaljnom svladavanju gradiva od motivacije, teorema i dokaza do primjene u matematici i fizici.

⋆ Butkov: *Mathematical Physics* (jednim dijelom se poklapa s gradivom ovih kolegija, ali je pristupom poprilično zastario udžbenik)

- ⋆ Stone, Goldbart: *Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students*
- ⋆ Lang: *Complex Analysis* (matematički udžbenik iz kompleksne analize)
- ⋆ Artin: *The Gamma Function* (kratak udžbenik o gama funkciji)
- ⋆ Tenenbaum, Pollard: *Ordinary Differential Equations* (udžbenik ciljan na "fizičarsku" publiku koji s mnoštvom riješenih primjera obrađuje teoriju običnih diferencijalnih jednadžbi)
- ⋆ Arnold: *Ordinary Differential Equations* (udžbenik o teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi s naglaskom na intuitivni uvid)
- ⋆ Jeffrey: *Applied Partial Differential Equations* (matematički udžbenik iz teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi)

Priručnik/Udžbenik: pregled definicija i teorema, s naglaskom na objašnjenje metoda, ali (gotovo) bez ikakvih dokaza.

- ⋆ Arfken, Weber: *Mathematical Methods for Physicists*
- ⋆ Riley, Hobson, Bence: *Mathematical Methods for Physics and Engineering*
- ⋆ Cahill: *Physical Mathematics*

Priručnik: skup definicija, teorema, metoda i formula, sve u najkraćoj mogućoj formi.

- ⋆ Bronshtein, Semendyayev, Musiol, Muehlig: *Handbook of Mathematics*
- ⋆ Abramowitz, Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*
- ⋆ Bateman Manuscript Project, Vol. 1-3

Zbirka zadataka: skup zadataka s rješenjima, koji u formi može varirati od "američkog stila" (relativno lagani zadaci, detaljna rješenja) do "ruskog stila" (teži zadaci, štura rješenja).

- ⋆ Schaum's Outline of Complex Variables, Schaum's Outline of Differential Equations, Schaum's Outline of Fourier Analysis
- ⋆ Mitrinović, Michael: *Calculus of residues* (zbirka zadataka iz kompleksne integracije; usput, toplo preporučam sve Mitrinovićeve udžbenike i zbirke zadataka!)
- ⋆ Volkovyskii, Lunts, Aramanovich: *A Collection of Problems on Complex Analysis* (zbrika zadataka "ruskog stila" iz kompleksne analize s mnoštvom primjera kompleksnih integrala)
- ⋆ Farlow: *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers* (pedagoški izvrsno koncipirana zbrika zadataka iz parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, ciljana na "fizičarsku" publiku)

Dodatna literatura:

- ⋆ Hrbacek, Jech: *Introduction to Set Theory*
- ⋆ Gelbaum, Olmsted: *Counterexamples in Analysis*
- ⋆ Needham: *Visual complex analysis*

0

Uvod

Prije hvatanja u koštac s glavnim dijelom gradiva, u uvodnom poglavlju ćemo napraviti kratak pregled osnovnih pojmova vezanih za skupove, opću topologiju, realnu analizu i temeljne algebarske strukture. Koristimo uobičajene logičke simbole:

$\wedge$ = "i", $\vee$ = "ili", $\forall$ = "za svaki", $\exists$ = "postoji", $\exists!$ = "postoji točno jedan",
$\Rightarrow$ = "slijedi", $\Leftrightarrow$ = "ako i samo ako" ili skraćeno "akko".

Napomena: $X \vee Y$ znači da vrijedi X ili Y ili oboje.

§ 0.1 Skupovi

Ovdje nećemo ulaziti u stroge aksiomatske temelje teorije skupova poput ZFC sustava aksioma, već polazimo od intuitivnog poimanja skupova. Elementarni pojam je **prazan skup** $\emptyset$, skup koji nema niti jednog elementa (intuitivno ga možemo označiti s praznim vitičastim zagradama $\{\,\}$). Ponekad iz stilskih razloga upotrebljavamo frazu "familija skupova" u značenju "skup skupova", samo kako bi se izbjegla ponavljajuća sintagma.

Primjer(i) 0.1. Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ možemo definirati* počevši od praznog skupa,

$$0 \equiv \emptyset\,, \quad 1 \equiv \{0\} = \{\emptyset\}\,, \quad 2 \equiv \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,,$$
$$3 \equiv \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\,, \quad \dots$$

Ponekad koristimo i skup prirodnih brojeva s nulom, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. //

*za detalje formalne definicije vidi [HJ99]

Definicija 0.2. **Inkluzija** $A \subseteq B$ među skupovima A i B vrijedi ako

$$(\forall\, x \in A):\; x \in B\,.$$

Kažemo da je skup A *sadržan* u skupu B. Ako postoje elementi iz B koji nisu sadržani u A, tada pišemo $A \subsetneq B$.

Komentar 0.3. Ovdje namjerno izbjegavamo oznaku $A \subset B$ koja u dijelu literature označava $A \subseteq B$ a u dijelu literature $A \subsetneq B$. Za svaki skup A uvijek vrijedi $\emptyset \subseteq A$, ali ne nužno i $\emptyset \in A$. Za svaka dva skupa A i B vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ akko $A = B$. //

Definicija 0.4. **Partitivni skup** $\mathscr{P}(X)$ skupa X je skup svih podskupova skupa X,

$$\mathscr{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\} \tag{1}$$

Primjer(i) 0.5. Ako je $S = \{a, \{b\}\}$, gdje su $a \neq \emptyset$, $b \neq \emptyset$ i $a \neq b$, tada vrijedi

$$\emptyset \notin S\,, \quad a \in S\,, \quad \{a\} \subseteq S\,, \quad b \notin S\,, \quad \{b\} \in S\,, \quad \{b\} \not\subseteq S\,, \quad \{\{b\}\} \subseteq S$$

$$\mathscr{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, S\}\;, \quad \emptyset \in \mathscr{P}(S)$$

//

Definicija 0.6. Osnovne operacije na skupovima $A, B \subseteq X$:

Unija skupova $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \;\vee\; x \in B\}$

Presjek skupova $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \;\wedge\; x \in B\}$

Razlika skupova $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Kažemo da skup A *presjeca* skup B ako vrijedi $A \cap B \neq \emptyset$. Kažemo da su skupovi A i B *disjunktni* ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$. **Komplement** podskupa $A \subseteq X$ unutar skupa X je skup $X - A$.

ALGEBRA SKUPOVA $A, B, C \subseteq X$

Idempotentnost	Komutativnost	Operacije s $\emptyset$	Operacije s X
$A \cup A = A$	$A \cup B = B \cup A$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cup X = X$
$A \cap A = A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cap X = A$

Asocijativnost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributivnost

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

de Morganovi zakoni

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

Definicija 0.7. **Uređen par** dva elementa x i y je dvočlani skup

$$(x, y) \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Tvrdimo da je na ovaj način jednakost $(x, y) = (x', y')$ ekvivalentna s $x = x'$ i $y = y'$. Naime, jednakost $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ je ekvivalentna s jednakostima $x = x'$ i $\{x, y\} = \{x', y'\}$, a iz ove dvije proizlazi $y = y'$.

Definicija 0.8. **Kartezijev produkt** $A \times B$ skupova A i B je skup uređenih parova,

$$A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \tag{2}$$

Ako za neki $n \in \mathbb{N}$ imamo n puta ponovljen Kartezijev produkt istog skupa, tada to pišemo kao "potenciju",

$$A^n \equiv \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ puta}}$$

⋆ Zadaci

1. Neka su X i $A, B \subseteq X$ skupovi. Dokažite da vrijede naredne jednakosti

$$A - B = A \cap (X - B)\ , \quad A - (X - B) = A \cap B\ ,$$

$$X - (A - B) = (X - A) \cup (A \cap B)$$

2. Čemu je jednak partitivni skup praznog skupa, $\mathscr{P}(\emptyset)$? Ako skup A ima $n \in \mathbb{N}$ članova, koliko članova ima pripadni partitivni skup $\mathscr{P}(A)$?

§ 0.2 Relacije

Definicija 0.9. **Binarna relacija** među skupovima A i B je podskup R Kartezijevog produkta $A \times B$. Specijalno, binarna relacija na skupu A je podskup R Kartezijevog produkta $A \times A$. Koristimo oznaku xRy u značenju $(x, y) \in R$.

Definicija 0.10. Za binarnu relaciju R na skupu A kažemo da je

- **refleksivna** ako $(\forall\, x \in A) : \; xRx$;
- **simetrična** ako $(\forall\, x, y \in A) \; : \; xRy \;\Rightarrow\; yRx$;
- **antisimetrična** ako $(\forall\, x, y \in A) : \; xRy \wedge yRx \;\Rightarrow\; x = y$;
- **tranzitivna** ako $(\forall\, x, y, z \in A) : \; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Definicija 0.11. Za binarnu relaciju R na skupu A kažemo da definira

- **parcijalni uređaj** na skupu A ako je R refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija;
- **totalni uređaj** na skupu A ako R definira parcijalni uređaj na A i ako

$$(\forall\, x, y \in A) : \; xRy \vee yRx \; .$$

Za općenitu relaciju parcijalnog uređaja ponekad koristimo oznaku "$\leq$", a parcijalno uređen skup A s pripadnom relacijom $\leq$ pišemo kao par $(A, \leq)$.

Primjer(i) 0.12. Inkluzija $\subseteq$ na nepraznoj familiji skupova $\mathcal{F}$ definira parcijalni uređaj. Međutim, ona općenito ne definira totalni uređaj jer u promatranoj familiji skupova $\mathcal{F}$ mogu postojati disjunktni neprazni skupovi. Nejednakost $\leq$ na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ definira totalni uređaj. S druge strane, stroga inkluzija $\subsetneq$ i stroga nejednakost $<$ nisu refleksivne relacije. //

Definicija 0.13. Neka je $(X, \leq)$ neprazan parcijalno uređen skup i neka je $S \subseteq X$ njegov neprazan podskup. Za skup S kažemo da je

- **omeđen odozgo** ako $(\exists\, M \in X)(\forall\, a \in S) : \; a \leq M$, pri čemu element M zovemo **gornja međa** skupa S;
- **omeđen odozdo** ako $(\exists\, m \in X)(\forall\, a \in S) : \; m \leq a$, pri čemu element m zovemo **donja međa** skupa S;
- **omeđen** ako je omeđen i odozgo i odozdo.

Definicija 0.14. Neka je $(X, \leq)$ neprazan parcijalno uređen skup i neka je $S \subseteq X$ njegov neprazan podskup. Ako je S omeđen odozgo, tada za njegovu najmanju gornju među (ako takva postoji), element $M \in X$ takav da vrijedi $M \leq M'$ za svaku gornju među M' skupa S, kažemo da je **supremum** skupa S i pišemo

$$M = \sup S \, . \tag{3}$$

Ako je S omeđen odozdo, tada za njegovu najveću donju među (ako takva postoji), element $m \in X$ takav da vrijedi $m \geq m'$ za svaku donju među m' skupa S, kažemo da je **infimum** skupa S i pišemo

$$m = \inf S \, . \tag{4}$$

Komentar 0.15. Ako postoje, supremum i infimum nekog skupa su jedinstveni. Naime, pretpostavimo da su M_1 i M_2 sva supremuma promatranog skupa: tada po definiciji vrijedi $M_1 \leq M_2 \leq M_1$, pa antisimetričnost relacije $\leq$ povlači da je $M_1 = M_2$. Također, ako su m_1 i m_2 dva infimuma promatranog skupa, tada je $m_1 \geq m_2 \geq m_1$, stoga $m_1 = m_2$. //

Primjer(i) 0.16. Uzmemo li, na primjer, na parcijalno uređenom skupu prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, \leq)$ skup $A = \{3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{N}$, tada je $\sup A = 5 \in A$ i $\inf A = 3 \in A$. S druge strane, uzmemo li na parcijalno uređenom skupu racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, \leq)$ skup $B = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$, tada je $\sup B = 1 \in B$, ali $\inf B = 0 \notin B$. Također, primjetimo da skup $S = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ nema niti supremuma niti infimuma na skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. //

Definicija 0.17. Za relaciju R na skupu A kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Za relaciju ekvivalencije često se koristi oznaka $\sim$.

Komentar 0.18. Naizgled, simetričnost i tranzitivnost povlače refleksivnost:

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a \, , \quad a \sim b \, \wedge \, b \sim a \Rightarrow a \sim a \, ?!$$

Međutim, za ovakvo zaključivanje prvo je potrebno pretpostaviti *egzistencije* elementa b, s kojim bi a bio u relaciji. //

Definicija 0.19. Za dani neprazni skup A i njegov element $a \in A$ relacija ekvivalencije na skupu A definira **klasu ekvivalencije**, skup onih elemenata koji su u relaciji s a,

$$[a] \equiv \{x \in A \mid x \sim a\} \tag{5}$$

Skup svih klasa ekvivalencija u skupu A zovemo **kvocijentni skup** i pišemo

$$A/\!\sim\, \equiv \{[a] \mid a \in A\} \tag{6}$$

Primjer(i) 0.20.

- Među točkama u ravnini s istaknutim ishodištem, točkom O, možemo definirati relaciju koja vrijedi akko su promatrane točke na istoj udaljenosti od O. Lako se provjeri da je ovo relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije neke točke $T \neq O$ u ravnini je kružnica sa središtem u ishodištu i radijusom $|OT|$.
- Za svaki prirodni broj $n \geq 2$ možemo definirati relaciju $x \sim y$ na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, koja vrijedi akko je apsolutna razlika $|x - y|$ dijeljiva s n (drugim riječima, akko x i y imaju isti ostatak pri dijeljenju s n). Lako se provjeri da je ovo relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije ove relacije su podskupovi $[\ell] = \{kn + \ell \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

//

Naredni teorem dokazuje korisno svojstvo relacije ekvivalencije i pripadnih klasa ekvivalencije.

Teorem 0.21. *Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada kvocijentni skup čini jednu* **particiju** *skupa A, odnosno klase ekvivalencije zadovoljavaju svojstva*

1. $\forall\, a \in A \;:\; a \in [a]\,,$
2. *vrijedi ili* $[a] = [b]$ *(akko je $a \sim b$) ili* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Bez ulaženja u strogu aksiomatiku dotičnih skupova, koristeći relacije ekvivalencije ovdje možemo uvesti nekoliko skupova s kojima ćemo se često služiti.

- Skup **cijelih brojeva** možemo definirati kao kvocijentni skup

  $$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\!\sim\,,$$

  gdje je $(a, b) \sim (c, d)$ akko $a + d = b + c$. Naime, ideja je uvesti negativne cijele brojeve pomoću objekata koje već poznajemo. Uočimo li kako primjerice broj -3 možemo višestruko prikazati kao rezultat oduzimanja prirodnih brojeva

  $$-3 = 1 - 4 = 2 - 5 = 3 - 6 = \dots$$

tada njega isto tako možemo promatrati kao skup uređenih parova

$$\{(1,4),(2,5),(3,6),\dots\}\ .$$

Ovaj skup je upravo jedna klasa ekvivalencije gore definirane relacije.

- Skup **racionalnih brojeva** možemo definirati kao kvocijentni skup

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim\ ,$$

gdje je $(a,b)\sim(c,d)$ akko $ad = bc$.

⋆ **Zadaci**

1. Neka je $(X,\le)$ neprazan parcijalno uređen skup, $S\subseteq X$ neprazan omeđen skup i $T\subseteq S$. Dokažite da tada vrijedi

$$\inf S \le \inf T \le \sup T \le \sup S\ .$$

2. Neka je $(X,\le)$ neprazan parcijalno uređen skup i $S,T\subseteq X$ dva neprazna omeđena skupa. Ako za svaki $s\in S$ i svaki $t\in T$ vrijedi $s\le t$, dokažite da je tada $\sup S\le\inf T$.

3. Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadana je relacija $x\sim y$ akko $(x-y)\in\mathbb{Q}$. Dokažite da je ovo relacija ekvivalencije i opišite pripadne klase ekvivalencije.

§ 0.3 Preslikavanja

Navikli smo na preslikavanja (funkcije) gledati kao "pridruživanje" elemenata iz jednog skupa elementima drugog skupa. U skladu s tim, operaciju "pridruživanja" simbolički predstavljamo uređenim parom $(x, F(x))$ varijable x i "vrijednosti" $F(x)$ koju joj pridružuje funkcija F. Međutim, koristeći gore uvedene pojmove možemo uobličiti precizniju definiciju.

Definicija 0.22. Neka su D (**domena**) i K (**kodomena**) neprazni skupovi. Za relaciju F među skupovima D i K kažemo da je **preslikavanje** ili **funkcija** ako zadovoljava naredna dva svojstva,

(a) $(\forall\, x\in D)(\exists\, y\in K):\ xFy$, i

(b) $(\forall\, x\in D)(\forall\, y_1,y_2\in K):\ xFy_1\wedge xFy_2\ \Rightarrow\ y_1=y_2$.

Drugim riječima, svaki element iz D je u relaciji s jednim i točno jednim elementom iz K. Preslikavanje zajedno s njenom domenom i kodomenom obično označavamo s $F : D\to K$, a relaciju xFy pišemo kao $F(x)=y$.

Primjer(i) 0.23. Na svakom nepraznom skupu X možemo uvesti elementarno preslikavanje, **identitet** $\mathrm{id}_X : X \to X$, takvo da je za svaki $x \in X$ definirano $\mathrm{id}_X(x) = x$. Također, za svaku danu domenu D, kodomenu K i element $y \in K$ možemo definirati **konstantnu funkciju** $c_y : D \to K$ s $c_y(x) = y$ za svaki $x \in D$. //

Definicija 0.24. Neka je $f : D \to K$ preslikavanje te $A \subseteq D$ i $B \subseteq K$. Tada definiramo

- **sliku** skupa A, $f(A) \equiv \{f(a) \in K \mid a \in A\}$
- **prasliku** skupa B, $f^{-1}(B) \equiv \{x \in D \mid f(x) \in B\}$

Definicija 0.25. Preslikavanje $f : D \to K$ je

- **injekcija** ako $\forall\, a, b \in D : \ a \neq b \ \Rightarrow \ f(a) \neq f(b)$;
- **surjekcija** ako je $f(D) = K$;
- **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Primjer(i) 0.26. Na primjer, preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ nije niti injekcija niti surjekcija. Preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ je injekcija ali nije surjekcija. Preslikavanje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = |x|$ nije injekcija ali je surjekcija. Konačno, preslikavanje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x/3$ je bijekcija. //

Definicija 0.27. Ako su zadana preslikavanja $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, tada je njihova **kompozicija** preslikavanje $(g \circ f) : X \to Z$, definirano s $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$ za svaki $x \in X$.

Definicija 0.28. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ preslikavanja za koja vrijedi $g \circ f = \mathrm{id}_X$ i $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Tada kažemo da su preslikavanja f i g jedno drugomu **inverzi**. U ovom slučaju obično koristimo oznaku $f^{-1} = g$, odnosno $g^{-1} = f$.

Teorem 0.29. *Preslikavanje $f : X \to Y$ ima inverz akko je bijekcija.*

Kardinalnost skupova (intuitivno: broj elemenata skupa). Za skup S kažemo da je **konačan** ako je prazan ili ako postoji bijekcija $b : S \to \{1, 2, \dots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. U protivnom kažemo da je skup **beskonačan**. U slučaju kada između beskonačnog skupa S i skupa $\mathbb{N}$ postoji bijekcija, kažemo da je S **prebrojivo beskonačan** (specijalno, samo skup $\mathbb{N}$, ali i skup $\mathbb{Q}$ su prebrojivo beskonačni). U protivnom za beskonačan skup S kažemo da je **neprebrojivo beskonačan** (npr. partitivni skup prirodnih brojeva $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ je neprebrojivo beskonačan).

Definicija 0.30. Neka je A neki neprazan skup. **Niz** je preslikavanje $f : \mathbb{N} \to A$. Ako "članove" niza obilježimo s $a_n = f(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada za niz koristimo oznake poput $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_n$ ili (a_n).

Komentar 0.31. Valja razlikovati niz od *skupa* njegovih vrijednosti u kodomeni. Na primjer, niz $a_n = (-1)^n$ ima beskonačno mnogo "članova", ali skup njegovih vrijednosti, $S = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$, ima samo dva elementa. //

Definicija 0.32. Indeksna funkcija za nepraznu familiju skupova $\mathcal{A}$ je svaka surjekcija $f : J \to \mathcal{A}$. Skup J nazivamo **skupom indeksa**, a familiju $\mathcal{A}$ zajedno s indeksnom funkcijom f **indeksirana familija skupova**. Za $\alpha \in J$ skup $f(\alpha) \in \mathcal{A}$ označavamo s A_α, a indeksiranu familiju s $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ ili samo s $\{A_\alpha\}$, ako je iz konteksta jasno o kojem skupu indeksa je riječ.

⋆ Zadaci

1. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ preslikavanja za koja vrijedi $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Dokažite da je tada g surjekcija, a f injekcija.

2. Neka je zadano preslikavanje $f : X \to Y$ te neprazni podskupovi domene, $A, B \subseteq X$, i kodomene, $G, H \subseteq Y$. Dokažite da f i f^{-1} "čuvaju" inkluziju,

$$B \subseteq A \;\Rightarrow\; f(B) \subseteq f(A)\,, \quad H \subseteq G \;\Rightarrow\; f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G)$$

   Nadalje, dokažite da f^{-1} "čuva" uniju, presjek i razliku, ali f "čuva" samo uniju skupova,

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,, \quad f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)\,, \quad f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$$

$$f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)\,, \quad f^{-1}(G - H) = f^{-1}(G) - f^{-1}(H)$$

§ 0.4 Algebarske strukture

Po uzoru na osnovne računske operacije na skupu cijelih ili skupu realnih brojeva, na općenitom (nepraznom) skupu možemo izdvojiti posebna preslikavanja ("operacije") pomoću kojih gradimo algebarski jezik na tom skupu. Ovdje ćemo se prisjetiti osnovnih algebarskih struktura.

Definicija 0.33. **Grupa** je uređen par $(G, *)$ nepraznog skupa G i operacije $* : G \times G \to G$ koja zadovoljava naredna svojstva,

(a) asocijativnost, $\forall\, a, b, c \in G \,:\, (a * b) * c = a * (b * c)$,

(n) postojanje neutralnog elementa, $\exists\, e \in G \,:\, \forall\, a \in G,\ e * a = a * e = a$,

(i) postojanje inverza, $\forall\, a \in G \quad \exists\, a^{-1} \in G \,:\, a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ako je operacija u grupi komutativna, odnosno ako za svaki $a, b \in G$ vrijedi

$$a * b = b * a$$

tada kažemo da je grupa $(G, *)$ **komutativna** ili **Abelova grupa**.

Primjer(i) 0.34. $(\mathbb{Z}, +)$, grupa cijelih brojeva s operacijom zbrajanja; $(\mathbb{Q}, +)$, grupa racionalnih brojeva s operacijom zbrajanja; $(\mathbb{Z}_k, +_k)$, grupa ostataka pri djeljenju s prirodnim brojem $k \geq 2$ i zbrajanjem modulo k; $(\mathbb{Q}^\times, \cdot\,)$, grupa racionalnih brojeva bez nule s operacijom množenja; $(\mathrm{Bij}(X), \circ\,)$, grupa bijekcija $b : X \to X$ na nepraznom skupu X s operacijom kompozicije funkcija; itd. S druge strane, primjerice, uređen par $(\mathbb{N}_0, +)$ nenegativnih cijeih brojeva s operacijom zbrajanja *nije* grupa jer niti jedan prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ nema inverz. //

Definicija 0.35. **Polje** je uređena trojka $(P, +, \cdot\,)$ nepraznog skupa P i operacija "zbrajanja" $+ : P \times P \to P$ i "množenja" $\cdot : P \times P \to P$, koja zadovoljava naredna svojstva,

1. uređen par $(P, +)$ je Abelova grupa (s neutralnim elementom "0"),
2. uređen par $(P - \{0\}, \cdot\,)$ je Abelova grupa (s neutralnim elementom "1"),
3. distributivnost, $\forall\, a, b, c \in P \,:\, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Primjer(i) 0.36. Polje racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, +, \cdot\,)$ s operacijama množenja i zbrajanja. S druge strane, uređena trojka $(\mathbb{Z}, +, \cdot\,)$ cijelih brojeva i operacija zabrajanja i množenja *nije* polje jer uređen par $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot\,)$ nije grupa. //

Komentar 0.37. U literaturi se zapis struktura često zloupotrebljava pa tako govorimo skraćeno o "grupi G", umjesto o "grupi $(G, \cdot\,)$", ili o "polju P", umjesto o "polju $(P, +, \cdot\,)$". //

⋆ Zadaci

1. Dokažite da je neutralni element grupe uvijek jedinstven. Dokažite da je inverz zadanog elementa grupe uvijek jedinstven.
2. Neka je $(P, +, \cdot\,)$ polje s neutralnim elementom 0 s obzirom na operaciju zbrajanja. Dokažite da tada za svaki element $x \in P$ vrijedi $0 \cdot x = 0$. Nadalje, koristeći ovu tvrdnju, dokažite kako su u polju neutralni elementi s obzirom na operacije zbrajanja i množenja nužno različiti, $0 \neq 1$.

§ 0.5 Skup realnih brojeva

Realne brojeve možemo jednoznačno opisati kao polje $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ koje je totalno uređeno s relacijom $\le$, kompatibilnom s operacijama na skupu,

$$a \le b \;\Rightarrow\; a + c \le b + c\,,$$

$$a \le b \,\wedge\, 0 \le c \;\Rightarrow\; ac \le bc\,,$$

i svojstvom da svaki odozgo omeđen podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum na skupu $\mathbb{R}$.

Konstrukciju takvog skupa možemo uvesti preko *Dedekindovog reza* na racionalnim brojevima: $\mathbb{R}$ je skup uređenih particija skupa $\mathbb{Q}$, odnosno uređenih parova skupova (A, B), gdje su $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, takvi da je $a < b$ za sve $a \in A$ i $b \in B$, pri čemu se primjerice držimo konvencije kako B nema najmanjeg elementa. Na primjer, $\sqrt{2} = (A, B)$, gdje je A unija svih negativnih racionalnih brojeva i onih racionalnih brojeva q za koje je $q^2 < 2$, a B skup svih pozitivnih racionalnih brojeva q za koje je $q^2 > 2$. Primjetimo, skup racionalnih brojeva ne posjeduje svojstvo da mu svaki odozgo omeđen podskup ima supremum (među racionalnim brojevima).

Komentar 0.38. Često koristimo neke pomoćne oznake, poput skupa pozitivnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$, skupa pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ (i analogno, negativnih racionalnih $\mathbb{Q}^-$ i negativnih realnih brojeva $\mathbb{R}^-$), skupa cijelih brojeva bez nule, $\mathbb{Z}^\times = \mathbb{Z} - \{0\}$, skupa racionalnih brojeva bez nule, $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} - \{0\}$ i skupa realnih brojeva bez nule, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$. //

Teorem 0.39 (nejednakost trokuta za realne brojeve). *Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\big||x| - |y|\big| \le |x \pm y| \le |x| + |y|\,. \tag{7}$$

DOKAZ : Prvo valja uočiti kako nejednakost $a^2 \leq b^2$ za realne brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ povlači $|a| \leq |b|$. Nadalje, promotrimo

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \ .$$

Stoga, vrijedi

$$|x+y| \leq |x| + |y| \ ,$$

odakle odmah slijedi i

$$|x-y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| \ .$$

Koristeći ove rezultate imamo

$$|x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$$

odnosno

$$|x| - |y| \leq |x-y| \ .$$

Primjetimo, desna strana nejednakosti je simetrična na zamjenu $x \leftrightarrow y$ pa vrijedi i

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \ .$$

Konačno,

$$\big||x| - |y|\big| = \big||x| - |-y|\big| \leq |x - (-y)| = |x+y| \ .$$

□

Teorem 0.40. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan omeđen skup. Tada vrijedi* $\inf S \leq \sup S$. *Ako je* $\inf S = \sup S$ *tada se S sastoji od točno jedne točke.*

DOKAZ : Pretpostavimo da vrijedi $\inf S > \sup S$. Tada za svaki $x \in S$ imamo

$$x \geq \inf S > \sup S \geq x \ ,$$

odakle slijedi da je $x > x$, kontradikcija! Slično tako, ako pretpostavimo da vrijedi $\inf S = \sup S$, tada za svaki $x \in S$ imamo

$$x \geq \inf S = \sup S \geq x \ ,$$

što je moguće samo ako je $x = \inf S = \sup S$. Stoga, u tom slučaju skup S ima samo jedan član. □

⋆ Zadaci

1. Pronađite infimume i supremume sljedećih podskupova realnih brojeva,

$$[0,1] \ , \ [0,1\rangle \ , \ \langle 0,1] \ , \ \langle 0,1\rangle \ , \ \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \ , \ [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$$

2. Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ neprazni skupovi i $\lambda \in \mathbb{R}$ realan broj. Tada definiramo

$$\lambda S \equiv \{\lambda x \mid x \in S\}$$

$$S + T \equiv \{s + t \mid s \in S \, , \, t \in T\}$$

Dokažite sljedeće tvrdnje:

(a) ako je S odozgo omeđen skup i $\lambda \geq 0$, tada vrijedi

$$\sup(\lambda S) = \lambda \sup S$$

(b) ako je S odozdo omeđen skup, tada vrijedi

$$\inf(\lambda S) = \lambda \inf S$$

(c) ako je S omeđen skup, tada vrijedi

$$\sup(-S) = -\inf(S)$$

(d) ako su S i T omeđeni odozgo, tada vrijedi

$$\sup(S + T) = \sup(S) + \sup(T)$$

§ 0.6 Topološki prostori

Jedna od temeljnih ideja "organiziranja" skupa s ciljem definiranja "analize" na njemu polazi od pojma otvorenog skupa.

Definicija 0.41. **Topološki prostor** je uređen par $(X, \mathscr{T})$ gdje je X skup, a $\mathscr{T}$ familija podskupova skupa X koja zadovoljava sljedeća svojstva

1. $X \in \mathscr{T}$ i $\emptyset \in \mathscr{T}$,
2. unija *proizvoljnog* broja skupova iz $\mathscr{T}$ je opet element familije $\mathscr{T}$,
3. presjek *konačno* mnogo skupova iz $\mathscr{T}$ je opet element familije $\mathscr{T}$.

U žargonu kažemo da je familija skupova $\mathscr{T}$ *zatvorena* na proizvoljne unije i konačne presjeke. Skupove $O \in \mathscr{T}$ zovemo **otvoreni skupovi**, a njihove komplemente $X - O$ **zatvoreni skupovi**. Skup ne mora biti nužno otvoren ili zatvoren: postoje skupovi koji su i otvoreni i zatvoreni ili oni koji nisu nijedno od to dvoje. Drugim riječima, skupovi nisu "poput vrata", koja uvijek moraju biti otvorena ili zatvorena (ako nije riječ o rotirajućim vratima). Valja uočiti kako skupovi koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni (mi ćemo ih kratko oslovljavati "o/z skupovi") u svakoj topologiji dolaze u paru, A i $X - A$.

Primjer(i) 0.42.

- Na svakom skupu X je moguće zadati dvije jednostavne topologije,

(a) **Trivijalna topologija**, $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$,

(b) **Diskretna topologija**, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$,

gdje je $\mathscr{P}(X)$ partitivni skup skupa X. U prvom slučaju su jedini otvoreni skupovi cijeli X i prazan skup $\emptyset$ (oni su ujedno i jedini zatvoreni skupovi u ovakvoj topologiji), dok je drugi slučaj suprotan ekstrem, *svi podskupovi* skupa X su otvoreni, a ujedno i zatvoreni skupovi.

- Topologiju možemo zadati na jednostavnim skupovima s konačno mnogo elemenata. Neka je npr. $X = \{a, b, c\}$. Tada su

$$\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\} \quad \text{i} \quad \mathscr{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, X\}$$

dva primjera topologije na skupu X (lako se provjeri da su zadovoljeni uvjeti iz definicije topologije). S druge strane, familija

$$\mathscr{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$$

nije topologija na skupu X jer $\{a\} \cup \{b\} \notin \mathscr{T}_3$.

- Kažemo da je na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadana **standardna topologija** ako su otvoreni skupovi oni čiju svaku točku je moguće "okružiti" otvorenim intervalom u potpunosti sadržanim u tom skupu,

$$\mathscr{T} = \{O \subseteq \mathbb{R} \mid (\forall x \in O)\,(\exists\, \delta > 0) \,:\, \langle x-\delta, x+\delta\rangle \subseteq O\}$$

gdje je

$$\langle x-\delta, x+\delta\rangle = \{y \in \mathbb{R} \mid x-\delta < y < x+\delta\} \ .$$

Prema ovoj definiciji sam skup $\mathbb{R}$, kao i prazan skup $\emptyset$ su otvoreni skupovi. Nadalje, neka je $\mathscr{F} = \{O_\alpha\}$ neka familija skupova iz gore definirane topologije, te neka je $x \in \bigcup_\alpha O_\alpha$. Tada postoji $O_\beta \in \mathscr{F}$, takav da je $x \in O_\beta$, a stoga i $\delta > 0$ sa svojstvom da je

$$\langle x-\delta, x+\delta\rangle \subseteq O_\beta \subseteq \bigcup_\alpha O_\alpha$$

Drugim riječima, skup $\bigcup_\alpha O_\alpha$ je otvoren. Konačno, neka je $\mathscr{F} = \{O_i\}$ neka *konačna* familija otvorenih skupova, te neka je $x \in \bigcap_i O_i$. Tada za svaki i vrijedi $x \in O_i$ i postoji $\delta_i > 0$ sa svojstvom $\langle x-\delta_i, x+\delta_i\rangle \subseteq O_i$. Ako sada definiramo $\delta_* = \min\{\delta_i\}$, tada za svaki i vrijedi

$$\langle x-\delta_*, x+\delta_*\rangle \subseteq \langle x-\delta_i, x+\delta_i\rangle \subseteq O_i$$

pa je

$$\langle x-\delta_*, x+\delta_*\rangle \subseteq \bigcap_i O_i$$

odakle zaključujemo da je $\bigcap_i O_i$ otvoren skup.

- Na svakom od skupova $\mathbb{R}^n$ za $n \in \mathbb{N}$ možemo prvo uvesti tzv. **Euklidsku udaljenost** među točkama $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d_{\mathrm{E}}(x,y) \equiv \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

a potom, za dano središte $s \in \mathbb{R}^n$ i radijus $r \in \mathbb{R}^+$, **otvorenu kuglu**

$$B^n(s,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_{\mathrm{E}}(s,x) < r\}$$

Tada je *standardna topologija* na $\mathbb{R}^n$ definirana zamjenom otvorenog intervala

$$\langle x-\delta, x+\delta\rangle = B^1(x,\delta)$$

iz definicije standardne topologije na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, s otvorenom kuglom $B^n(x,\delta)$ radijusa $\delta > 0$ sa središtem u točki $x \in \mathbb{R}^n$.

//

Komentar 0.43. Zašto je u definiciji otvorenih skupova dozvoljen samo presjek *konačnog* broja otvorenih skupova? Pretpostavimo da po nekakvoj alternativnoj definiciji i presjek *proizvoljnog* broja otvorenih skupova daje otvoren skup. No, u tom slučaju standardna topologija na skupu realnih brojeva više ne zadovoljava aksiome topološkog prostora. Na primjer, presjek beskonačne familije otvorenih skupova

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -1-1/n, 1+1/n\rangle = [-1,1]$$

bi trebao biti otvoren skup. Međutim, nijedna od rubnih točkaka, $x = \pm 1$, nemaju okolinu oblika $\langle x-\delta, x+\delta\rangle$ sadržanu u skupu A pa prema definiciji otvorenih skupova u standardnoj topologiji na $\mathbb{R}$ skup A nije otvoren! Zamjerka ovakvoj alternativnoj definiciji topologije na skupu nije u tome što je ona *pogrešna* (što god to značilo), već u tome da je manje *upotrebljiva* (za početak, ne opisuje standardne otvorene skupove na skupu realnih brojeva). //

Teorem 0.44. *Zatvoreni skupovi zadovoljavaju sljedeća svojstva:*

1. *X i $\emptyset$ su zatvoreni skupovi*
2. *unija* konačno *mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup*
3. *presjek bilo kojeg broja zatvorenih skupova je zatvoren skup*

Dokaz :
1. Slijedi odmah iz definicije. Cijeli skup X i prazan skup $\emptyset$ su, dakle, o/z skupovi u svakoj topologiji na skupu X.
2. Neka je zadana *konačna* familija zatvorenih skupova $\{C_i\}$ s ukupno $n \in \mathbb{N}$ članova. Svaki skup C_i je po definiciji komplement otvorenog skupa, $C_i = X - O_i$. Upotrebom de Morganovih zakona slijedi

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - O_i) = X - \bigcap_{i=1}^{n} O_i$$

Kako je presjek konačnog broja otvorenih skupova otvoren skup, slijedi tražena tvrdnja.

3. Neka je zadana *proizvoljno velika* familija zatvorenih skupova $\{C_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Opet, upotrebom de Morganovih zakona slijedi

$$\bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha = \bigcap_{\alpha\in J} (X - O_\alpha) = X - \bigcup_{\alpha\in J} O_\alpha$$

Kako je unija proizvoljnog broja otvorenih skupova otvoren skup, slijedi tražena tvrdnja. □

Primjer(i) 0.45. **Cantorov skup** dobije se sljedećim iterativnim postupkom. Neka je

$$C_0 = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$$

Iz ovog zatvorenog intervala izbacimo srednju otvorenu trećinu,

$$C_1 = C_0 - \langle 1/3, 2/3\rangle = [0,1/3] \cup [2/3,1]$$

U sljedećem koraku iz svakog od dva zatvorena intervala u C_1 izbacimo srednje trećine, $\langle 1/9, 2/9\rangle$ i $\langle 7/9, 8/9\rangle$. Rezultat je unija četiri zatvorena intervala,

$$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

Ponavljanjem ovog postupka u n-tom koraku ćemo imati 2^n zatvorenih intervala ukupne duljine $(2/3)^n$. Možemo zapisati formalnu rekurzivnu relaciju,

$$C_n = C_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right\rangle$$

Konačno, Cantorov skup C definiramo kao presjek (ovdje namjerno izbjegavamo upotrebu "limesa")

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \,. \tag{8}$$

Stoga, Cantorov skup C je zatvoren podskup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa standarnom topologijom. //

Definicija 0.46. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$ njegov neprazan podskup. Kažemo da smo zadali **relativnu topologiju** $\mathscr{T}_Y$ na skupu Y, ako smo definirali otvorene skupove u Y kao one koji nastaju presjekom otvorenih skupova u X sa skupom Y,

$$\mathscr{T}_Y = \{Y \cap O \mid O \in \mathscr{T}\} \tag{9}$$

Za skup Y s relativnom topologijom $\mathscr{T}_Y$ kažemo da je **potprostor** prostora X.

Prvo valja provjeriti da skupovi iz familije $\mathscr{T}_Y$ uistinu zadovoljavaju aksiome topologije,

- $\emptyset = Y \cap \emptyset$, $Y = Y \cap X$.
- Za svaki $O_\alpha \in \mathscr{T}_Y$ postoji $\widetilde{O}_\alpha \in \mathscr{T}$, takav da je $O_\alpha = Y \cap \widetilde{O}_\alpha$, pa možemo pisati

$$\bigcup_{\alpha\in J} O_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J} (Y \cap \widetilde{O}_\alpha) = Y \cap \Big(\bigcup_{\alpha\in J} \widetilde{O}_\alpha\Big) \in \mathscr{T}_Y$$

- S druge strane, za konačne presjeke imamo

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i = \bigcap_{i=1}^{n} (Y \cap \widetilde{O}_i) = Y \cap \big(\bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{O}_i\big) \in \mathscr{T}_Y$$

□

Primjer(i) 0.47. Ako na segmentu $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ definiramo relativnu topologiju, induciranu od standardne topologije na skupu realnih brojeva, tada će primjerice otvoreni skupovi na ovom potprostoru biti intervali $[0,x\rangle$ i $\langle x,1]$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, $\langle a,b\rangle$ za sve $a,b \in \langle 0,1\rangle$, itd. //

⋆ **Zadaci**

1. Neka je na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadana standardna topologija. Koji su među navedenim skupovima otvoreni, koji zatvoreni, a koji niti jedno od tog dvoje?

$$[0,1]\,,\ [0,1\rangle\ ,\ \langle 0,1]\ ,\ \langle 0,1\rangle$$

$$\langle -\infty,0\rangle\ ,\ \langle -\infty,0]\ ,\ \langle 0,+\infty\rangle\ ,\ [0,+\infty\rangle$$

$$\{0\}\,,\ \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}\,,\ \{0\} \cup \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

§ 0.7 Dijelovi skupova

Definicija 0.48. Ako otvoren skup O sadrži točku x, tada kažemo da je skup O **okolina** točke x. Mi ćemo koristiti oznaku O_x za skup koji je okolina točke x (iz konteksta je uvijek jasno je li posrijedi indeks skupa ili oznaka točke čija je taj skup okolina).

Definicija 0.49. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Svakom skupu $A \subseteq X$ definiramo

Unutrašnjost $A^\circ = \{x \in X \mid \exists\, O_x \ :\ O_x \subseteq A\}$

Rub $\partial A = \{x \in X \mid \forall\, O_x \ :\ O_x \cap A \neq \emptyset \ \wedge\ O_x \cap (X - A) \neq \emptyset\}$

Zatvarač $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$

Iz gornjih definicija odmah slijedi da je

$$X^\circ = X = \overline{X}\ , \quad \partial X = \emptyset \quad \text{i} \quad \emptyset^\circ = \partial\emptyset = \overline{\emptyset} = \emptyset \tag{10}$$

Također, odmah vidimo da općenito vrijedi

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \tag{11}$$

Naime, za svaki $x \in A^\circ$ postoji okolina $O_x \subseteq A$, pa je $x \in A$, odakle slijedi $A^\circ \subseteq A$. Nadalje, za svaki $x \in A$, svaka okolina O_x siječe skup A (barem u točki x), pa je $x \in \overline{A}$ i stoga $A \subseteq \overline{A}$.

Definicije ruba skupa i ruba njegovog komplementa su identične, pa za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi $\partial A = \partial(X - A)$. Nadalje, unutrašnjost i rub bilo kojeg skupa $A \subseteq X$, kao i unutrašnjost komplementa tog skupa su uvijek međusobno disjunktni skupovi,

$$A^\circ \cap \partial A = \partial A \cap (X - A)^\circ = (X - A)^\circ \cap A^\circ = \emptyset \tag{12}$$

pa je rub skupa moguće prikazati kao presjek $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$, a sam topološki prostor X rastaviti na spomenute disjunktne skupove,

$$X = A^\circ \cup \partial A \cup (X - A)^\circ\ . \tag{13}$$

Primjer(i) 0.50. Promotrimo nekoliko primjera dijelova podskupova skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$,

S	S°	∂S	$\overline{S}$
$\langle -\infty, 1\rangle$	$\langle -\infty, 1\rangle$	$\{1\}$	$\langle -\infty, 1]$
$\langle -\infty, 1]$	$\langle -\infty, 1\rangle$	$\{1\}$	$\langle -\infty, 1]$
$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\{0, 1\}$	$[0, 1]$
$\langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$	$\langle 0, 1\rangle$	$\{0, 1, 2\}$	$[0, 1] \cup \{2\}$
$\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$	$\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$	$\{0, 1, 2\}$	$[0, 2]$
$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$

//

Teorem 0.51. *Unutrašnjost skupa je otvoren, a rub i zatvarač su zatvoreni skupovi.*

DOKAZ :
(a) Za svaki $x \in A^\circ$ postoji okolina sadržana u skupu A, $O_x \subseteq A$. Nadalje, vrijedi i $O_x \subseteq A^\circ$ jer je svaki $y \in O_x$ zbog $O_x \subseteq A$ element skupa A°. Odavde slijedi

$$A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} O_x$$

jer smo takvom unijom obuhvatili sve točke iz A° i nijednu točku van A°. Kako je unija otvorenih skupova otvoren skup slijedi tvrdnja.

(b) Skup $X - \partial A = A^\circ \cup (X - A)^\circ$ je, prema (a) dijelu tvrdnje, unija otvorenih skupova, pa je i sam otvoren skup, a otuda slijedi da je rub ∂A zatvoren skup.

(c) Vrijedi $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$, a kako je prema (a) dijelu teorema $(X - A)^\circ$ otvoren skup, slijedi da je $\overline{A}$ zatvoren skup. □

Teorem 0.52. *Skup $A \subseteq X$ je*

(a) *otvoren akko je $A = A^\circ$;*

(b) *zatvoren akko je $A = \overline{A}$.*

Dokaz :

(a) Ako je $A = A^\circ$, tada je prema prethodnom teoremu A otvoren skup. Obratno, ako pretpostavimo da je A otvoren skup, tada za svaki $a \in A$ postoji okolina $O_a \subseteq A$, odakle slijedi $a \in A^\circ$, odnosno $A \subseteq A^\circ$. Kako uvijek vrijedi $A \supseteq A^\circ$, slijedi $A = A^\circ$.

(b) Ako je $A = \overline{A}$, tada je prema prethodnom teoremu A zatvoren skup. Obratno, ako pretpostavimo da je A zatvoren skup, tada je prema prvom dijelu teorema $X - A = (X - A)^\circ = X - \overline{A}$, odakle slijedi $A = \overline{A}$. □

Definicija 0.53. **Gomilište** skupa A je točka $x \in X$ za koju vrijedi: svaka okolina O_x siječe $A - \{x\}$, odnosno, svaka okolina točke x sadrži barem još jednu točku iz A različitu od same točke x. Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A'.

Primjer(i) 0.54. Nekoliko primjera na skupu realnih brojeva,

A	A'
$\langle 0, 1\rangle$	$[0, 1]$
$\langle 0, 1] \cup \{2\}$	$[0, 1]$
$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{0\}$

//

Komentar 0.55. Valja napomenuti kako u literaturi postoji suptilna razlika u upotrebi riječi "gomilište". Gornja definicija se odnosi na *gomilišta skupova*, prema kojoj na primjer dvočlani skup

$$S = \left\{(-1)^k \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$$

nema gomilišta, iako nam intuitivno izgleda kao da je niz $a_k = (-1)^k$ "nagomilan" u točkama -1 i 1. Suptilnost se sastoji u tome što smo u slučaju skupa S napravili uniju *vrijednosti* članova niza a_k, čime smo "ponavljajuće" članove pretvorili u jedan. Iz ovog razloga se koristi donekle različita definicija *gomilišta nizova*: gomilište niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je točka x čija svaka okolina sadrži beskonačno mnogo (ne nužno međusobno različitih) članova tog niza. Prema ovoj definiciji su, očigledno, točke -1 i 1 gomilišta niza $a_k = (-1)^k$. //

Teorem 0.56. *Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi*

$$\overline{A} = A \cup A' \tag{14}$$

DOKAZ : Neka je $x \in A'$. Tada, prema definiciji gomilišta, svaka okolina O_x siječe skup $A - \{x\}$, a onda i sâm skup A. Prema tome, vrijedi $x \in \overline{A}$ i stoga $A' \subseteq \overline{A}$. Kako uvijek vrijedi $A \subseteq \overline{A}$ imamo sve skupa $(A \cup A') \subseteq \overline{A}$. Obratno, neka je $x \in \overline{A}$. Ako je $x \in A$, tada smo gotovi s dokazom, pa pretpostavimo suprotno, $x \notin A$. Prema definiciji zatvarača, svaka okolina O_x siječe skup A, a kako je po pretpostvaci $x \notin A$, okolina O_x siječe $A - \{x\}$. Stoga, vrijedi $x \in A'$, odnosno $A' \supseteq \overline{A}$. Time smo dokazali i obratnu inkluziju, $(A \cup A') \supseteq \overline{A}$, odakle slijedi tražena tvrdnja. □

Korolar 0.57. *Skup A sadrži sva svoja gomilišta akko je zatvoren skup.*

Definicija 0.58. **Izolirana točka** x skupa $A \subseteq X$ je ona koju je moguće otvorenom okolinom "izolirati" od ostatka skupa A, drugim riječima, ona točka za koju postoji okolina $O_x \subseteq X$ sa svojstvom

$$A \cap O_x = \{x\}$$

Definicija 0.59. Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je **gust** u X ako vrijedi $\overline{A} = X$, odnosno akko svaki otvoren neprazan skup $O \subseteq X$ siječe skup A. Kažemo da je skup $A \subseteq X$ **nigdje gust** u X ako vrijedi $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$.

Primjer(i) 0.60. Na primjer, skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$, a skup $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$. //

⋆ Zadaci

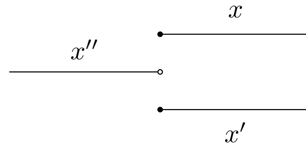
1. Neka je Z zatvoren podskup topološkog prostora $(X, \mathscr{T})$ i (x_n) niz točaka sadržan u skupu Z (odnosno, $x_n \in Z$ za sve $n \in \mathbb{N}$) koji ima nizovno gomilište $g \in X$. Dokažite da je tada nužno $g \in Z$.

§ 0.8 Povezanost i kompaktnost

Definicija 0.61. Neka je X topološki prostor. Kažemo da je X **Hausdorffov prostor** ako za svaki par točaka $a, b \in X$ postoje *disjunktne* okoline O_a i O_b.

Primjer(i) 0.62.

- Lako se provjeri da je skup realnih brojeva sa standardnom topologijom Hausdorffov prostor: točke $x, y \in \mathbb{R}$, uz $x \neq y$, možemo razdvojiti okolinama $\langle x-r, x+r\rangle$ i $\langle y-r, y+r\rangle$ uz $0 < r < |y-x|/2$.
- Analogno prethodnom primjeru, svaki $\mathbb{R}^n$ sa standardnom topologijom je Hausdorffov prostor: točke $x, y \in \mathbb{R}^n$, uz $x \neq y$, možemo razdvojiti otvorenim kuglama $B^n(x,r)$ i $B^n(y,r)$ s pozitivnim radijusom $r < d_{\mathrm{E}}(x,y)/2$.
- Uzmimo dva pravca, odnosno dvije kopije skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom i označimo im točke s koordinatama x i x'. Zatim identificiramo parove točaka s jednakim negativnim vrijednostima koordinata, $x = x' < 0$, te označimo "stopljenu" negativnu os s koordinatama x''. Rezultat je pravac koji se "račva" i ima topologiju generiranu skupovima oblika $\langle a'', b''\rangle$, $\langle a'', b'\rangle$, $\langle a'', b\rangle$, $\langle a, b\rangle$ i $\langle a', b'\rangle$. Ovaj prostor nije Hausdorffov jer točke 0 i $0'$ nije moguće razdvojiti disjunktnim okolinama.



//

Definicija 0.63. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor, te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz točaka u X. Tada kažemo da ovaj niz **konvergira** k točki $a \in X$ ako za svaku okolinu O_a postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da je $x_m \in O_a$ za svaki $m \geq N$.

Teorem 0.64. *U Hausdorffovom prostoru niz točaka može konvergirati najviše k jednoj točki. Tu točku nazivamo* **limes** *niza.*

DOKAZ : Neka je $(X, \mathscr{T})$ Hausdorffov prostor. Pretpostavimo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k točki $a \in X$, te neka je $b \in X - \{a\}$. Po pretpostavci postoje disjunktne okoline O_a i O_b. Okolina O_a sadrži sve osim konačno mnogo točaka promatranog niza, odakle slijedi da O_b sadrži konačno mnogo elemenata tog niza, pa promatrani niz ne može konvergirati u b. □

Definicija 0.65. Topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ je **povezan** ako se skup X ne može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna otvorena skupa. Ovo je ekvivalentno tvrdnji da se skup X ne može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna zatvorena skupa. Ako je prostor $(X, \mathscr{T})$ nepovezan, pa se može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna otvorena skupa, O i $X - O$, tada kažemo da oni čine *separaciju* prostora $(X, \mathscr{T})$.

Primjer(i) 0.66. Može se dokazati da je $\mathbb{R}^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ povezan topološki prostor. S druge strane, uklanjanjem jedne točke iz $\mathbb{R}$ ili jednog pravca iz $\mathbb{R}^2$ ili jedne ravnine iz $\mathbb{R}^3$ (uz zadržavanje standardne topologije) dobivamo nepovezane topološke prostore. //

Definicija 0.67. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. **Pokrivač skupa** $A \subseteq X$ je familija (ne nužno otvorenih) skupova $\mathcal{P}$ čija unija sadrži sve elemente skupa A. Za pokrivač $\mathcal{P}$ kažemo da je *otvoren pokrivač* ako su mu svi elementi otvoreni skupovi. **Potpokrivač** $\widetilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ pokrivača $\mathcal{P}$ je familija skupova koja je i sama pokrivač promatranog skupa.

Definicija 0.68. Neka je X topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ **kompaktan** ako za svaki njegov *otvoren* pokrivač $\mathcal{P}$ postoji *konačan* potpokrivač $\widetilde{\mathcal{P}}$. Isto tako, za sam topološki prostor X kažemo da je kompaktan ako za svaki njegov *otvoren* pokrivač $\mathcal{P}$ postoji *konačan* potpokrivač $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Definicija kompaktnosti može na prvi pogled zvučati neintuitivno. Sljedeći teorem ilustrira dio motivacije ovakve definicije: nemoguće je "ugurati" beskonačno mnogo točaka u kompaktan prostor, bez da su se točke negdje "nagomilale".

Teorem 0.69. *Beskonačan podskup $A \subseteq X$ kompaktnog prostora $(X, \mathscr{T})$ ima gomilište.*

DOKAZ : Pretpostavimo da beskonačan skup A nema gomilišta, drugim riječima, da su mu sve točke izolirane. To znači da za svaki $a \in A$ postoji okolina $V_a \subseteq X$ koja siječe A u samo jednoj točki (konkretno, $V_a \cap A = \{a\}$). Nadalje, kako je $A' = \emptyset$, slijedi $\overline{A} = A$, pa je A zatvoren, a $X - A$ otvoren skup. Familija okolina

$$\mathcal{P} = \{V_a \mid a \in A\} \cup \{X - A\}$$

čini jedan otvoren pokrivač prostora X, a kako je X kompaktan, postoji njegov konačan potpokrivač $\widetilde{\mathcal{P}}$. Nadalje, skup $X - A$ ne sadrži točke iz A, odakle slijedi da je A moguće pokriti s konačno mnogo skupova oblika V_a. No, to znači da barem jedan od njih mora sadržavati beskonačno mnogo elemenata iz skupa A, što je u kontradikciji s pretpostavkom da su sve točke skupa A izolirane. □

U praksi često radimo unutar jednog od prostora $\mathbb{R}^n$, pa je u takvom kontekstu praktično znati ekvivalentnu, praktičniju karakterizaciju kompaktnih skupova. Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je *omeđen* ako postoji otvorena kugla $B^n(x_0, R) \supseteq A$, sa središtem u $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i radijusom $R > 0$.

Teorem 0.70 (Heine-Borel). *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan akko je zatvoren i omeđen.*

Primjer(i) 0.71. Zatvoren segment $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, kružnica $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ i sfera $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ su primjeri kompaktnih skupova. S druge strane, otvoren interval $\langle 0,1 \rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije (jer je otvoren skup), kao niti interval $\langle -\infty, 0]$ (jer nije omeđen). //

⋆ Zadaci

1. Prostor Sierpińskog je dvočlani skup $S = \{0,1\}$ na kojem je zadana topologija $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Je li ovaj prostor Hausdorffov? Dokažite da svi nizovi u ovom prostoru konvergiraju u točku 0.
2. Dokažite da je Cantorov skup kompaktan.
3. Kvadrat $K \subseteq \mathbb{R}^2$ duljine brida a podijelimo na 3×3 manja kvadrata (svaki duljine brida $a/3$), odaberemo jedan od manjih kvadrata, opet ga podijelimo na 3×3 manja kvadrata (svaki duljine brida $a/9$), i dalje iterativno nastavljamo proces. Dokažite da je presjek niza odabranih kvadrata nužno neprazan i sastoji se od točno jedne točke.

§ 0.9 Nizovi i redovi realnih brojeva

Ponovimo prvo konvergentnosti nizova realnih brojeva.

Definicija 0.72. Kažemo da je niz realnih brojeva (x_n) **konvergentan** ako

$$(\exists\, x \in \mathbb{R})(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, N \in \mathbb{N}) :\ n \geq N \ \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon\ .$$

U tom slučaju broj x zovemo **limes** niza (x_n) i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\ .$$

U protivnom, ako niz nije konvergentan, kažemo da je **divergentan**.

Teorem 0.73. *Neka su (x_n) i (y_n) konvergentni nizovi realnih brojeva, s limesima*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad i \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y \ .$$

(a) Ako postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da vrijedi $x_n \le y_n$ za sve $n \ge N$, tada je $x \le y$.

(b) ("teorem o sendviču") Ako vrijedi $x = y = L$ i (z_n) je niz realnih brojeva takvih da vrijedi $x_n \le z_n \le y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tada i (z_n) konvergira k L.

(c) Ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ realne konstante, tada je i $(\alpha x_n + \beta y_n)_n$ konvergentan niz realnih brojeva i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y \ . \tag{15}$$

Dokaz :

(a) Pretpostavimo suprotno, $x > y$. Odaberimo $\epsilon \in \langle 0, (x-y)/2 \rangle$. Tada postoji $M \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m \ge M$ vrijedi $|x - x_m| < \epsilon$ i $|y - y_m| < \epsilon$. No, tada je i $x_m > y_m$, jer

$$x_m - y_m = (x-y) + (x_m - x) - (y_m - y) \ge (x-y) - 2\epsilon > 0 \ ,$$

što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom.

(b) Uočite da $|x_n - L| < \epsilon$ i $|y_n - L| < \epsilon$ povlače

$$-\epsilon < x_n - L \le z_n - L \le y_n - L < \epsilon$$

odnosno $|z_n - L| < \epsilon$. Odavde, korištenjem definicija konvergentnosti nizova (x_n) i (y_n) slijedi tvrdnja.

(c) Uočimo prvo kako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|(\alpha x_n + \beta y_n) - (\alpha x + \beta y)| = |\alpha(x_n - x) + \beta(y_n - y)| \le$$

$$\le |\alpha| \cdot |x_n - x| + |\beta| \cdot |y_n - y|$$

Pretpostavimo prvo da su $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$. Kako su po pretpostavci (x_n) i (y_n) konvergentni nizovi, znamo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N > 0$, takav da za sve prirodne brojeve $n \ge N$ vrijedi

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2|\alpha|} \qquad \text{i} \qquad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2|\beta|} \ ,$$

odakle slijedi tražena tvrdnja. Dokaz je analogan i u specijalnim slučajevima kada je bar jedna od konstanti α i β jednaka nuli.

□

Komentar 0.74. Uočite da konvergentnost niza suma $(x_n + y_n)$ ne povlači nužno konvergentnost zasebnih nizova (x_n) i (y_n). Imamo jednostavan protuprimjer s $x_n = n$ i $y_n = -n$: u ovom slučaju je niz $(x_n + y_n)$ trivijalno konvergentan, međutim, nijedan od nizova (x_n) i (y_n) ne konvergira. //

Definicija 0.75. Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je

(a) **omeđen odozgo** ako postoji $M \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$ vrijedi $x_n \leq M$;

(b) **omeđen odozdo** ako postoji $m \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$ vrijedi $x_n \geq m$;

(c) **omeđen** ako je omeđen i odozgo i odozdo, odnosno ako postoji $M \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$ vrijedi $|x_n| \leq M$.

Definicija 0.76. Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je

(a) **monotono rastući** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_{n+1} \geq x_n$;

(b) **monotono padajući** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_{n+1} \leq x_n$;

(c) **monoton** ako monotono rastući ili monotono padajući;

Pridjev "striktno" se dodaje ako u definiciji podrazumjevamo strogu nejednakost.

Teorem 0.77. *Monoton niz realnih brojeva konvergira akko je omeđen. Ako je (x_n) monotono rastući omeđen niz, tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Ako je (x_n) monotono padajući omeđen niz, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Definicija 0.78. Neka je (x_n) niz realnih brojeva, definiran s preslikavanjem $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Za niz realnih brojeva (y_n), definiran s preslikavanjem $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kažemo da je **podniz** niza (x_n) ako postoji strogo rastuća funkcija $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takva da je $g = f \circ \psi$. U tom slučaju pišemo $\phi(k) = n_k$ i $y_k = x_{n_k}$.

Teorem 0.79 (Bolzano-Weierstraß). *Omeđen niz realnih brojeva ima konvergentan podniz.*

U slučaju kada ne znamo koji je točno limes konvergentnog niza ili konstruiramo dokaz neke tvrdnje u kojoj ne želimo eksplicitno upotrijebiti dotični limes, korisno je imati alternativnu definiciju konvergentnosti nizova.

Definicija 0.80. Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je **Cauchyjev niz** ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$ vrijedi $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Lema 0.81. *Niz realnih brojeva (x_n) konvergentan akko je Cauchyjev.*

DOKAZ : Pretpostavimo da je (x_n) Cauchyjev niz. Tada je on nužno omeđen. Naime, za dani $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da je $|x_m - x_n| < \epsilon/2$ za sve $m, n \geq N$. No, to znači da se svi x_n za $n \geq N$ nalaze unutar intervala duljine ϵ, a onda zajedno s prvih $N-1$ članova u nizu leže unutar intervala konačne duljine. Nadalje, prema Bolzano-Weierstraßovom teoremu, omeđen niz u $\mathbb{R}$ ima konvergentan podniz, $(x_{n_k})_{n_k}$. Označimo limes ovog podniza s x. Tada za svaki ϵ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n, n_k \geq N$ vrijedi

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Drugim riječima, niz (x_n) je konvergentan i ima limes u točki x.

Ako niz konvergira k broju $x \in \mathbb{R}$, tada obrat tvrdnje lako slijedi iz nejednakosti

$$|x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x_n - x| \; .$$

□

Ponekad imamo posla s nizovima realnih brojeva koji nemaju limes, ali su omeđeni (odozgo, odozdo ili oboje) pa je ipak moguće definirati veličine koje bi trebale "uhvatiti" najveće i najmanje gomilište.

Definicija 0.82. **Limes supremum** i **limes infimum** niza realnih brojeva (x_n) definirani su s

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{x_m \,|\, m \geq n\}\big) \tag{16}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{x_m \,|\, m \geq n\}\big) \tag{17}$$

Primjer(i) 0.83. Zadan je niz

$$x_n = (-1)^n \, \frac{n+5}{n}$$

Uvodimo pomoćnu oznaku

$$\sigma_n = \sup\left\{(-1)^n \, \frac{n+5}{n} \, , \, (-1)^{n+1} \, \frac{n+6}{n+1} \, , \, (-1)^{n+2} \, \frac{n+7}{n+2} \, , \dots\right\}$$

Prvo valja uočiti da za sve pozitivne realne brojeve $x > y > 0$ i svaki $p > 0$ vrijedi

$$\frac{x+p}{y+p} < \frac{x}{y}$$

pa je

$$\sigma_n = \begin{cases} (n+5)/n \, , & \text{paran } n \\ (n+6)/(n+1) \, , & \text{neparan } n \end{cases}$$

odnosno

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1$$

Analogno se pokaže da je

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$$

Uočimo kako niti $x = 1$ niti $x = -1$ nisu limesi, ali su gomilišta dotičnog niza. //

Lema 0.84. *Neka je (x_n) odozgo omeđen niz realnih brojeva. Tada je $s = \limsup x_n$ akko vrijede sljedeća dva uvjeta:*

(a) *za svaki realni broj $t < s$ postoji beskonačno mnogo članova niza za koje vrijedi $x_n > t$, i*

(b) *za svaki realni broj $t > s$ postoji konačno mnogo članova niza za koje vrijedi $x_n > t$.*

Dokaz :

1. Pretpostavimo da je $s = \limsup x_n$. Neka je $t < s$. Ako bi postojao $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$ vrijedi $x_n \leq t$, tada bi imali $\sup\{x_m \mid m \geq n\} \leq t$ za sve $n \geq N$, u kontradikciji s definicijom limes supremuma. Nadalje, neka je $t > s$. Ako bi postojalo beskonačno mnogo članova niza za koje vrijedi $x_n > t$, tada bi vrijedilo $\sup\{x_m \mid m \geq n\} \geq t$, opet u kontradikciji s definicijom limes supremuma.
2. Pretpostavimo da broj $s \in \mathbb{R}$ zadovoljava svojstva (a) i (b) u lemi. No, tada znamo da za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $t < s$ vrijedi $\sup\{x_m \mid m \geq n\} \geq t$, odnosno da za sve $t > s$ i dovoljno velik $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sup\{x_m \mid m \geq n\} \leq t$, pa je s nužno limes supremum promatranog niza.

□

Teorem 0.85. *Limes supremum niza realnih brojeva (x_n) koji je omeđen odozgo je njegovo najveće gomilište. Analogno, limes infimum niza realnih brojeva (x_n) koji je omeđen odozdo je njegovo najmanje gomilište.*

Teorem 0.86. *Niz realnih brojeva (x_n) je konvergentan akko vrijedi*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R} ,$$

u kom slučaju je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x .$$

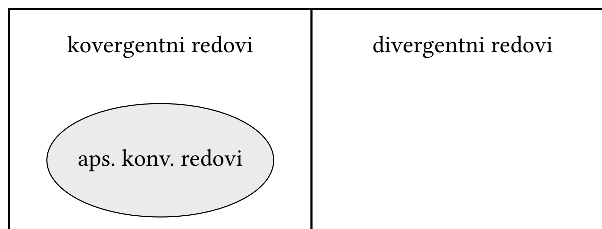
Definicija 0.87. Neka je (x_n) niz realnih brojeva, a $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ parcijalna suma, odnosno suma prvih n članova tog niza. **Red** je niz parcijalnih suma (s_n), ponekad skraćeno zapisana kao $\sum x_k$. Ako postoji limes $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, kažemo da je red *konvergentan*, a broj s zovemo **suma reda**. U protivnom, ako red nije konvergentan, onda kažemo da je *divergentan*. Za red $\sum x_k$ kažemo da je **apsolutno konvergentan** ako je red $\sum |x_k|$ konvergentan.

Teorem 0.88. *Apsolutno konvergentan red je nužno konvergentan.*

DOKAZ : Pretpostavimo da je $\sum x_k$ apsolutno konvergentan red. Tada je niz pripadnih parcijalnih suma $(\sum^n |x_k|)_n$ nužno Cauchyjev niz. Stoga, zbog nejednakosti

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| - \sum_{\ell=1}^{m} |x_\ell|$$

slijedi i da je niz parcijalnih suma $(\sum^n x_k)_n$ Cauchyjev niz, a onda je i $\sum x_k$ konvergentan red. □



Primjeri: harmonijski red $\sum 1/n$ je divergentan; alternirajući red $\sum(-1)^n/n$ je konvergentan ali nije apsolutno konvergentan; alternirajući red $\sum(-1)^n/n^2$ je apsolutno konvergentan.

⋆ **Zadaci**

1. Dokažite da je konvergentan niz realnih brojeva omeđen. Navedite primjer omeđenog niza koji nije konvergentan.
2. Pretpostavite da su (x_n) i (y_n) dva konvergentna niza realnih brojeva. Dokažite da je tada i niz realnih brojeva $(x_n y_n)$ konvergentan i vrijedi
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$
3. Konvergiraju li svi Cauchyjevi nizovi racionalnih brojeva k racionalnom broju?

§ 0.10 Neprekidna preslikavanja

Podsjetimo se za početak definicije neprekidnih funkcija na skupu realnih brojeva. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan skup a $f : S \to \mathbb{R}$ neko realno preslikavanje. Kažemo da je f neprekidno u $x_0 \in S$ ako za svaki realan broj $\epsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$, takav da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Primjetimo kako ovaj uvjet možemo zapisati korištenjem otvorenih kugli,

$$f(B^1(x_0, \delta) \cap S) \subseteq B^1(f(x_0), \epsilon)$$

Ovu definiciju sada možemo jednostavno poopćiti.

Definicija 0.89. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ te $S \subseteq \mathbb{R}^m$ neprazan skup. Za preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je **neprekidno u točki** $x_0 \in S$ ako za svaki realan broj $\epsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je

$$f(B^m(x_0, \delta) \cap S) \subseteq B^n(f(x_0), \epsilon) \ .$$

Nije teško pronaći primjer preslikavanja koje je neprekidno svugdje osim u jednoj točki, na primjer $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \, , & x < 0 \\ 1 \, , & x \geq 0 \end{cases} \tag{18}$$

Međutim, prekidi (diskontinuiteti) funkcija ne moraju biti izolirane točke. Na primjer, *Dirichletova funkcija* $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s

$$D(x) = \begin{cases} 1 \, , & x \in \mathbb{Q} \\ 0 \, , & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \tag{19}$$

ima prekid u svakoj točki, dok je funkcija $f(x) = xD(x)$ neprekidna samo u $x = 0$.

Dokaz : Za svaki $\epsilon > 0$ dovoljno je uzeti $\delta < \epsilon$, tako da za svaki $|x - 0| < \delta$ vrijedi

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \delta < \epsilon$$

Dakle, funkcija f je neprekidna u $x_0 = 0$. S druge strane, ako je $x_0 \neq 0$, tada za svaki pozitivan realan broj $\epsilon < |x_0|$ i svaki $\delta > 0$ možemo odabrati $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, takav da je $|x| > |x_0|$, te koji je iracionalan broj ako je x_0 racionalan i obratno, pa vrijedi

$$|f(x) - f(x_0)| \geq |x_0| > \epsilon$$

i stoga funkcija f ima prekid u svim točkama $x_0 \neq 0$. □

Usput, postoji i primjer realne funkcije koja je neprekidna samo u iracionalnim brojevima (tzv. Thomaeova funkcija, definirana s $t(x) = D(x)/q(x)$, gdje je $q(x)$ najmanji pozitivni nazivnik u prikazu racionalnog broja $x = p/q$).

Nadalje, valja biti oprezan oko funkcija više varijabli. Na primjer, ako su za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, restrikcije $x \mapsto f(x, y)$ i $y \mapsto f(x, y)$ neprekidne, to *ne povlači nužno* kako je f neprekidna funkcija! Na primjer,

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) \, , & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \, , & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \tag{20}$$

S jedne strane, lako se provjeri kako su navedene restrikcije neprekidne funkcije. S druge strane, duž pravca (x, x) imamo $f(x, x) = 1/2$ za sve x osim u ishodištu, gdje je $f(0, 0) = 0$, pa funkcija f *nije* neprekidna u ishodištu!

Štoviše, čak i ako su restrikcije neke funkcije (više varijabli) na *sve* pravce kroz neku točku neprekidne, to ne znači nužno da je promatrana funkcija neprekidna u toj točki. Na primjer, promotrimo funkciju $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 y/(x^4 + y^2) \, , & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \, , & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \tag{21}$$

Restrikcije $x \mapsto g(x,0)$ i $y \mapsto g(0,y)$ su konstantne pa stoga neprekidne funkcije. Nadalje, za svaki realan broj $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ i $x \neq 0$ imamo

$$g(x,\lambda x) = \frac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2}\ , \quad \lim_{x\to 0} g(x,\lambda x) = 0 = g(0,0)$$

pa su sve restrikcije funkcije g na pravce kroz ishodište neprekidne. Međutim, za sve $x \neq 0$ vrijedi $g(x,x^2) = 1/2$ (ovdje prilazimo ishodištu duž parabole u domeni) pa funkcija g ne može biti neprekidna u ishodištu!

Kako poopćimo ovu definiciju za preslikavanja definirana na općenitom topološkom prostoru?

Definicija 0.90. Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ **neprekidno** ako je skup $f^{-1}(O)$ otvoren u X za svaki otvoren skup $O \subseteq Y$.

Teorem 0.91. *Preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je neprekidno prema "topološkoj" definiciji akko je neprekidno prema "ϵ–δ" definiciji.*

DOKAZ :

(a) Pretpostavimo da je preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ neprekidno prema "topološkoj" definiciji. Tada je za svaki $x \in \mathbb{R}^m$ i za svaki $\epsilon > 0$ praslika $f^{-1}(B^n(f(x,\epsilon)))$ otvoren skup, pa postoji $\delta > 0$, takav da je $B^m(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B^n(f(x,\epsilon)))$. Drugim riječima, vrijedi $f(B^m(x,\delta)) \subseteq B^n(f(x,\epsilon))$ pa je ispunjen uvijet iz "ϵ–δ" definicije.

(b) Pretpostavimo da je preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ neprekidno prema "ϵ–δ" definiciji. Mi želimo dokazati da je tada za svaki otvoren skup $O \subseteq \mathbb{R}^n$ praslika $f^{-1}(O)$ također otvoren skup. Neka je $x \in f^{-1}(O)$. Tada je $f(x) \in O$ pa postoji otvorena kugla $B^n(f(x),\epsilon) \subseteq O$ za neki $\epsilon > 0$. Nadalje, prema "ϵ–δ" definiciji slijedi da postoji $\delta > 0$, takav da je $f(B^m(x,\delta)) \subseteq B^n(f(x),\epsilon)$, odnosno postoji otvorena kugla $B^m(x,\delta) \subseteq f^{-1}(O)$. Drugim riječima, $f^{-1}(O)$ je otvoren skup.

Napomena: analognim dokazom pokazujemo da je općenitije preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}^n$, definirano na domeni $S \subseteq \mathbb{R}^m$, neprekidno prema "topološkoj" definiciji akko je neprekidno prema "ϵ–δ" definiciji, s tim da otvorene kugle u domeni moramo zamjeniti s presjecima $B^m(x,\delta) \cap S$. □

Komentar 0.92. Možemo se zapitati zašto je u Definiciji 0.90 korišten *inverz* preslikavanja? Pretpostavimo da smo u Definiciji 0.90 zamjenili "$f^{-1}(O)$" s "$f(O)$" i promotrimo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Prema uobičajenoj definiciji ovo je neprekidno preslikavanje. Međutim, $f(\langle -1,1\rangle) = [0,1\rangle$ nije otvoren skup, pa prema "modificiranoj definiciji" ovo ne bi bilo neprekidno preslikavanje. Poanta je da inverz ima mnogo "bolje" ponašanje s obzirom na uniju i presjek skupova. //

Lema 0.93. *Neka su X i Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je*

a) X povezan, tada je i $f(X)$ povezan prostor;

b) $A \subseteq X$ kompaktan skup, tada je i $f(A)$ kompaktan skup.

Dokaz : a) Ako je $f(X)$ nepovezan prostor, tada ga možemo napisati kao uniju dva disjunktna otvorena skupa, $f(X) = A \cup B$. Nadalje, vrijedi i $X = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, gdje su $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ disjuktni neprazni skupovi. Kako je po pretpostavci f neprekidno preslikavanje, ovi skupovi su otvoreni, pa je X nepovezan prostor. Dakle, ako je X povezan prostor, prostor $f(X)$ ne može biti nepovezan.

b) Pretpostavimo da je $A \subseteq X$ kompaktan skup i neka je $\mathcal{P}$ otvoren pokrivač skupa $f(A)$. Kako je f neprekidno preslikavanje, skup $f^{-1}(O)$ je otvoren za svaki $O \in \mathcal{P}$, pa je familija skupova

$$\mathcal{Q} = \left\{ f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{P} \right\}$$

otvoren pokrivač skupa A. Po pretpostavci, A je kompaktan skup, pa postoji konačan potpokrivač

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \left\{ f^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{P} \right\}$$

Time je konstruiran konačan potpokrivač $\widetilde{\mathcal{P}} = \{O_i\}$ pokrivača $\mathcal{P}$, čime smo dokazali da je $f(A)$ kompaktan skup. □

Teorem 0.94 (o međuvrijednostima). *Neka je X povezan topološki prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Ako su $a, b \in X$ te $s \in \mathbb{R}$, takvi da je $f(a) < s < f(b)$, tada postoji $c \in X$ takav da je $f(c) = s$.*

Dokaz : Polazeći od pretpostavki teorema, skupovi

$$A = f(X) \cap \langle -\infty, s \rangle \quad \text{i} \quad B = f(X) \cap \langle s, +\infty \rangle$$

su neprazni (jer jedan sadrži $f(a)$ a drugi $f(b)$), otvoreni u $f(X)$ i disjunktni. Kako je f neprekidno preslikavanje, a X povezan prostor, prema prethodnoj lemi slijedi i da je $f(X)$ povezan prostor. Ako ne bi postojala tocka $c \in X$, takva da je $f(c) = s$, tada bi $f(X)$ bio unija skupova A i B, odnosno nepovezan prostor, što je u kontradikciji s pretpostavkama! □

Teorem 0.95 (Weierstraß; postojanje ekstrema na kompaktu). *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Ako je X kompaktan, onda postoje $a, b \in X$, takvi da je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za sve $x \in X$.*

Dokaz : Pretpostavimo da $f(X)$ nema maksimum. Tada je familija skupova

$$\mathcal{P} = \{ \langle -\infty, f(x) \rangle \mid x \in X \}$$

otvoren pokrivač od $f(X)$, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \{ \langle -\infty, f(x_1) \rangle, \ldots, \langle -\infty, f(x_n) \rangle \}$$

Međutim, element $\max\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ nije pokriven nijednim od skupova u ovom potpokrivaču, što kontradikcija s pretpostavkom da je posrijedi pokrivač! To znači da postoji $a \in X$, takav da je $f(a) \geq f(x)$ za svaki $x \in X$. Analogno se pokaže postojanje minimuma. □

Komentar 0.96. Jedna od posljedica ovih teorema je i Rolleov teorem u realnoj analizi koji kaže da za neprekidnu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabilnu na intervalu $\langle a,b\rangle$, takvu da je $f(a) = f(b)$, postoji točka $c \in [a,b]$, takva da je $f'(c) = 0$. Naime, zatvoreni segment $[a,b]$ je kompaktan podskup realnih brojeva, pa prema Weierstraßovom teoremu sadrži točke na kojima funkcija f poprima ekstremalne vrijednosti. Ako je bar jedna od tih točaka (maksimum ili minimum) element intervala $\langle a,b\rangle$, tada će u njoj derivacija f' iščezavati. S druge strane, ako su obje točke u rubnim točkama segmenta $[a,b]$, tada će funkcija f biti konstantna i vrijedit će $f'(x) = 0$ za sve $x \in \langle a,b\rangle$. //

Primjer(i) 0.97. Najjednostavniji meteorološki model Zemlje je sfera $Z = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ na kojoj je temperatura zadana neprekidnim preslikavanjem $T : Z \to \mathbb{R}$. S obzirom da je Z kompaktan skup, nužno postoje točke $x_{\mathrm{min}}, x_{\mathrm{max}} \in Z$ u kojima T poprima minimalnu vrijednost T_{min} i maksimalnu vrijednost T_{max}, kao i točke na Z u kojima T poprima sve vrijednosti iz segmenta $[T_{\mathrm{min}}, T_{\mathrm{max}}]$. Konačno, koristeći teorem o međuvrijednostima možemo dokazati kako pod danim pretpostavkama uvijek postoji par antipodalnih točaka koje imaju jednaku temperaturu! //

§ 0.11 Realna analiza, ukratko

Definicija 0.98. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, te $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je tipa C^k u točki $p \in \Omega$ ako postoje derivacije

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_j}}$$

za sve $j \le k$ i neprekidne su u točki p. Specijalno, C^0 funkcije su neprekidne funkcije. Nadalje, ako je neka funkcija tipa C^k *za sve* $k \in \mathbb{N}_0$, tada kažemo da je ona tipa C^∞ ili **glatka funkcija**.

Na primjer, ako kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tipa C^2 u nekoj točki p, tada to znači da je sama funkcija f neprekidna u točki p, te su (u Kartezijevom koordinatnom sustavu) sve derivacije do uključivo drugog reda,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

definirane i neprekidne u točki p.

Komentar 0.99. Ako je, na primjer, neka funkcija $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna i ima definiranu prvu derivaciju f' u svim točkama svoje domene, to ne znači da je i funkcija $f' : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ nužno neprekidna. Na primjer, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

ima dobro definiranu derivaciju u svim točkama svoje domene,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases} .$$

Međutim, f' nije neprekidna u $x = 0$. //

Primjer(i) 0.100. Svi polinomi, eksponencijalna funkcija, trigonometrijske funkcije $\cos$ i $\sin$, te hiperbolne trigonometrijske funkcije sh i ch su primjeri glatkih funkcija. Funkcije

$$f_k(x) = |x|x^k$$

su klase C^k ali ne i klase C^{k+1} zbog ponašanja u $x = 0$. Naime, $f_0(x) = |x|$ je neprekidna funkcija koja nije derivabilna u ishodištu. Nadalje, za $k > 0$ imamo

$$f_k'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f_k(x+\epsilon) - f_k(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{|x+\epsilon|(x+\epsilon)^k - |x|x^k}{\epsilon}$$

$$(x+\epsilon)^k = x^k + kx^{k-1}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$f_k'(x) = kf_{k-1}(x) + \lim_{\epsilon\to 0} x^k \frac{|x+\epsilon| - |x|}{\epsilon} = kf_{k-1}(x) + x^k \mathrm{sgn}\,(x) =$$

$$= kf_{k-1}(x) + |x|x^{k-1} = (k+1)f_{k-1}(x)$$

pa indukcijom slijedi tvrdnja. //

Postoje i primjeri neprekidnih funkcija koje u niti jednoj točki nisu derivabilne. Prvi takav primjer je pronašao Weierstraß1872. godine, tzv. Weierstraßova funkcija $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana redom

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x) \tag{22}$$

gdje je $0 < a < 1$, a b je neparan cijeli broj, takav da vrijedi $ab \geq 1$.

Primjetimo, međutim, kako imamo funkcije više varijabli koje u nekoj točki mogu imati definirane sve parcijalne derivacije, bez da budu neprekidne u toj točki. Primjer je funkcija f definirana u (20), za koju lako provjerimo

$$f_x(0,0) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\epsilon,0) - f(0,0)}{\epsilon} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(0,\epsilon) - f(0,0)}{\epsilon} = 0$$

Stoga, ako želimo da derivabilnost funkcije više varijabli bude "jače" svojstvo od neprekidnosti, ono mora uključivati *više* od pukog postojanja parcijalnih derivacija.

Teorem 0.101 (Weierstraß). *Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $\epsilon > 0$, tada postoji polinom $P : [a,b] \to \mathbb{R}$, takav da*

$$(\forall\, x \in [a,b]) : \ |f(x) - P(x)| < \epsilon\,.$$

Definicija 0.102. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup. **Taylorov razvoj** glatke funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$ oko točke $a \in \Omega$ dan je (formalnim) redom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \tag{23}$$

Za funkciju f kažemo da je (**realno**) **analitička funkcija**, odnosno da je tipa C^ω u točki $a \in \Omega$ ako je na nekoj okolini $O_a \subseteq \Omega$ jednaka svom Taylorovom razvoju.

Sve analitičke funkcije su nužno glatke jer u protivnom neki koeficijenti u Taylorovom razvoju ne bi bili dobro definirani. Međutim, obrat općenito ne vrijedi. Standardni primjer glatke funkcije koja nije analitička (bar u jednoj točki) je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x)\,, & x > 0 \\ 0\,, & x \le 0 \end{cases}$$

DOKAZ : Očigledno, funkcija je analitička za sve $x < 0$. Promotrimo nadalje točke $x \ge 0$. Prvo ćemo indukcijom dokazati da za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $f^{(k)}(x) = p_{2k}(1/x)\, e^{-1/x}$, gdje je p_{2k} neki polinom reda $2k$. Odavde slijedi da je f glatka funkcija u svim točkama $x > 0$. Zatim ćemo dokazati da su sve derivacije $f^{(k)}$ definirane i neprekidne u $x = 0$.

(a) Trivijalno, tvrdnja vrijedi za $k = 0$ ($p_0(y) = 1$). Nadalje, $f'(x) = e^{-1/x}/x^2$, pa je $p_2(y) = y^2$. Pretpostavimo da je $f^{(k)}(x) = p_{2k}(1/x)\, e^{-1/x}$. Tada je

$$f^{(k+1)}(x) = p_{2k-1}(1/x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x} + p_{2k}(1/x)e^{-1/x}\,\frac{1}{x^2} =$$

$$= \big(q_{2k+1}(1/x) + q_{2k+2}(1/x)\big)e^{-1/x} \equiv p_{2k+2}(1/x)\, e^{-1/x}$$

(b) Odmah vidimo da je $f(0) = 0$. Pretpostavimo da je $f^{(k)}(0) = 0$. Tada je

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x}$$

Očigledno,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = 0$$

S druge strane,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{p_{2k}(1/x)\, e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} p_{2k+1}(1/x)\, e^{-1/x} = \lim_{u\to\infty} \frac{p_{2k+1}(u)}{e^u} = 0\,,$$

gdje smo u pretposljednjem koraku uveli supstituciju $u = 1/x$, a u posljednjem upotrijebili L'Hospitalovo pravilo $2k+1$ puta. Dakle, sve derivacije funkcije f su definirane i jednake 0 u $x = 0$. Također, na sličan način provjerimo da su sve derivacije $f^{(k)}$ neprekidne u $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to 0^+} p_{2k}(1/x)\, e^{-1/x} = \lim_{u\to\infty} \frac{p_{2k}(u)}{e^u} = 0 = f^{(k)}(0)$$

Konačno, funkcija f *nije* analitička u $x = 0$ jer je Taylorov red oko te točke identički jednak nuli, dok je funkcija f različita od nule za sve $x > 0$. □

Postoje i primjeri funkcija koje su glatke, ali nisu analitičke u *niti jednoj* točki domene, poput $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane sumom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{2^n}\right) \cos\left(2^n x\right) \tag{24}$$

Definiciju Taylorovog reda možemo poopćiti na funkciju više varijabli.

Definicija 0.103. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je (**realno**) **analitička funkcija**, odnosno da je tipa C^ω u točki $a \in \Omega$ ako je na nekoj okolini $O_a \subseteq \Omega$ jednaka svom Taylorovom razvoju, odnosno za svaki $x \in O_a$

$$f(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}(a)(x^i - a^i)(x^j - a^j) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{\partial f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(a)(x^{i_1} - a^{i_1})\cdots(x^{i_k} - a^{i_k}) + \dots \tag{25}$$

gdje sve sume idu u granicama od 1 do n.

1
Kompleksna analiza

Kako poopćiti analizu sa skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ na skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$?

§ 1.1 Polje kompleksnih brojeva

Polje kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$ je uređena trojka koja se sastoji od skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, te operacija definiranih sljedećim pravilima,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \;\equiv\; (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \qquad \text{(zbrajanje)} \tag{1.1}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \;\equiv\; (x_1 x_2 - y_1 y_2,\, x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad \text{(množenje)} \tag{1.2}$$

Neutralni element s obzirom na zbrajanje ("nula") je $(0, 0)$, a neutralni element s obzirom na množenje ("jedinica") je $(1, 0)$. Za skup kompleksnih brojeva bez nule upotrebljavamo oznaku $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ (ponekad se ovaj skup označava s $\mathbb{C}^*$). Aditivni i multiplikativni inverzi kompleksnog broja $z = (x, y)$ dani su redom s

$$-\,z = (-x, -y) \tag{1.3}$$

za sve $z \in \mathbb{C}$, te

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \,,\, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \tag{1.4}$$

za sve $z \in \mathbb{C}^\times$. Valja uočiti kako su kompleksni brojevi oblika $(x, 0)$ s gore uvedenim operacijama izomorfni s poljem realnih brojeva. Stoga obično nulu $(0, 0)$ pišemo jednostavno kao realni broj 0, a jedinicu $(1, 0)$ kao realni broj 1. Nadalje, kako vrijedi

$$(x, y) = (1, 0) \cdot (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$$

uobičajeno je kompleksne brojeve $z = (x, y)$ pisati u obliku $z = x + iy$, gdje je izostavljeno eksplicitno pisanje jedinice 1, a uvedena je **imaginarna jedinica** $i \equiv (0, 1)$. Na ovaj način je identitet $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ preveden u izraz

$$i^2 = -1 \tag{1.5}$$

Ovdje vidimo orginalnu motivaciju uvođenja imaginarne jedinice: ona je korijen jednadžbe $z^2 + 1 = 0$.

Svaki kompleksni broj $z = x+iy$ ima svoj **realni dio** $\mathrm{Re}(z) = x$ i **imaginarni dio** $\mathrm{Im}(z) = y$. U starijim knjigama su u upotrebi nešto drugačije oznake, $\Re\, z$ za realni dio i $\Im\, z$ za imaginarni dio kompleksnog broja z. Ako je $\mathrm{Re}(z) = 0$ i $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ kažemo da je z *čisto imaginaran*. Dva kompleksna broja z_1 i z_2 su jednaki ako i samo ako su im jednaki realni i imaginarni dio,

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \ \wedge \ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

Nanovo, osnovne operacije među kompleksnim brojevima u ovom zapisu sada glase,

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm y_1) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.6}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.7}$$

Omjer kompleksnih brojeva z_1 i $z_2 \neq 0$ računamo prema

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

Primjetimo, razlomak je proširen tako da u nazivniku dobijemo realan broj, a potom smo razdvojili realni i imaginarni dio u brojniku. Prilikom potenciranja, odnosno uzastopnog množenja kompleksnih brojeva valja imati na umu da za sve $k \in \mathbb{Z}$ vrijede sljedeće jednakosti

$$i^{4k+1} = i \ , \quad i^{4k+2} = -1 \ , \quad i^{4k+3} = -i \ , \quad i^{4k} = 1 \tag{1.8}$$

Za svaki kompleksni broj $z = x+iy$ definiramo operaciju **kompleksne konjugacije**,

$$z^* \equiv x - iy \tag{1.9}$$

Ovo je involutorna operacija, $(z^*)^* = z$, koja zadovoljava sljedeća svojstva

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^* \ , \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \ , \quad (z^{-1})^* = (z^*)^{-1} \tag{1.10}$$

Ponekad se upotrebljava i alternativna oznaka, $\bar{z} = z^*$. Pomoću kompleksne konjugacije možemo zapisati realni i imaginarni dio kompleksnog broja,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\,(z + z^*) \ , \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\,(z - z^*) \tag{1.11}$$

Svakom kompleksnom broju z pridružujemo i **modul** (**apsolutnu vrijednost**) $|z|$, nenegativan realni broj definiran preko

$$|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.12}$$

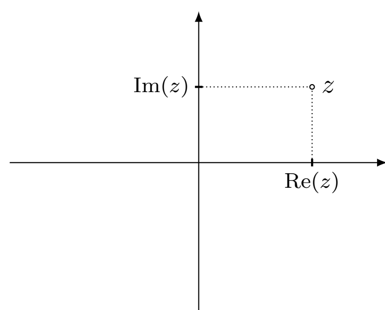
Nula je jedini kompleksni broj iščezavajućeg modula. Modul kompleksnog broja zadovoljava sljedeća svojstva:

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2| \ , \quad |z^{-1}| = |z|^{-1} \tag{1.13}$$

$$|z^*| = |z| \ , \quad z^* \cdot z = |z|^2 \tag{1.14}$$

§ 1.2 Kompleksna ravnina

Iz same definicije jasno je kako postoji prirodna korespodencija između skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i točaka u ravnini: svakom kompleksnom broju $z = x+iy$ možemo jednoznačno pridružiti točku $T(x, y)$ u ravnini $\mathbb{R}^2$. Ravninu u kojoj je svakoj točki pridružen odgovarajući kompleksni broj zovemo **kompleksna ravnina***. Radi jednostavnijeg izražavanja često se rabi fraza ***u točki*** z ili čak samo ***u*** z u značenju "u točki (kompleksne ravnine) pridruženoj kompleksnom broju z".



Promotrimo čemu odgovaraju dosad uvedeni pojmovi u ovakvom geometrijskom prikazu kompleksnih brojeva. Očigledno, $\mathrm{Re}(z)$ jednak je apscisi, a $\mathrm{Im}(z)$ ordinati točke T. U skladu s tim obično os apscisa zovemo **realna os**, a os ordinata **imaginarna os**. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $|z|$ jednaka je udaljenosti odgovarajuće točke T od ishodišta kompleksne ravnine. Općenito, udaljenost točaka T_1 i T_2, pridruženih brojevima z_1 i z_2, jednaka je modulu razlike tih kompleksnih brojeva,

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \, = |z_1 - z_2| \tag{1.15}$$

Ako je kompleksnom broju z pridružena točka $T(x, y)$, tada je kompleksno konjugiranom broju z^* pridružena točka $T'(x, -y)$, nastala refleksijom na realnoj osi. Nadalje, kako svakoj točki $T(x, y)$ odgovara radijus-vektor $\overrightarrow{OT}$, zbroju kompleksnih brojeva $z_1 + z_2$ pridružen je zbroj radijus-vektora $\overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{OT_2}$.

Teorem 1.1. *Kompleksni brojevi* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *zadovoljavaju* **nejednakost trokuta***,*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{1.16}$$

*U literaturi nailazimo na niz različitih naziva ove ravnine koji se vezuju uz imena matematičara, među kojima su Caspar Wessel (1745.-1818.), Jean-Robert Argand (1768.-1822.) i Johann Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.), a čiji su radovi doprinjeli razvoju ideje smještanja kompleksnih brojeva u ravninu. Mi ćemo upotrebljavati povijesno neutralan naziv.

DOKAZ : Polazimo od sljedeće jednakosti

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)$$

Kako uvijek vrijedi $\mathrm{Re}(z) \le |z|$, imamo

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) \le |z_1 z_2^*| = |z_1||z_2|$$

pa je

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

odakle slijedi jedna od traženih nejednakosti. Dakako, zamjenom $z_2 \to -z_2$ odmah imamo i

$$|z_1 - z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2$$

Nadalje, primjenimo li upravo dokazanu nejednakost na par kompleksnih brojeva z_2 i $z_1 - z_2$, dobivamo

$$|z_1| = |z_2 + (z_1 - z_2)| \le |z_2| + |z_1 - z_2|$$

odnosno

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

Desna strana nejednakosti je simetrična na zamjenu $z_1 \leftrightarrow z_2$, pa slijedi i preostala nejednakost.
□

Komentar 1.2. Naziv ove nejednakosti je očigledno povezan s geometrijskim nejednakostima koje vrijede među stranicama trokuta: zbroj dvije stranice je uvijek veći od treće stranice, a razlika dvije stranice uvijek manja od treće stranice. Ako je $|z_1| \neq |z_2|$, sve veličine u nejednakostima (1.16) su strogo pozitivne, pa možemo pisati recipročnu verziju nejednakosti trokuta,

$$\frac{1}{\big||z_1| - |z_2|\big|} \ge \frac{1}{|z_1 \pm z_2|} \ge \frac{1}{|z_1| + |z_2|} \tag{1.17}$$

//

Kompleksnu ravninu možemo promatrati i u polarnim koordinatama (r, ϕ), koje su povezane s Kartezijevim koordinatama (x, y) preko

$$x = r\cos\phi\,, \quad y = r\sin\phi$$

Odavde slijedi zapis kompleksnog broja u polarnim koordinatama,

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{1.18}$$

Radijus r jednak je apsolutnoj vrijednosti kompleksnog broja,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tag{1.19}$$

a polarni kut ϕ određen je (do na višekratnik broja 2π) sustavom jednadžbi

$$\cos\phi = \frac{x}{r}\,, \quad \sin\phi = \frac{y}{r} \tag{1.20}$$

Kut ϕ zovemo **argument** kompleksnog broja z i pišemo $\mathrm{Arg}(z) = \phi$. Specijalno, za slučaj kompleksnog broja $z = 0$ imamo $r = 0$, dok je njegov argument nedefiniran.

Obično se uvodi restrikcija argumenta na interval duljine 2π, u kom slučaju govorimo o **glavnoj vrijednosti argumenta** i pišemo $\arg(z)$. Odabir intervala glavne vrijednosti argumenta ovisi o problemu kojeg rješavamo. Na primjer, ako definiramo

$$-\pi < \arg(z) \le \pi$$

tada je

$$\arg(1) = 0 \ , \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2} \ , \quad \arg(-1) = \pi \ , \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \ , \quad \text{itd.}$$

Općenito, imamo vezu

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.21}$$

Množenjem dva kompleksna broja njihove apsolutne vrijednosti se množe, a argumenti zbrajaju, u što se možemo jednostavno uvjeriti:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = \\ &= r_1 r_2 \big(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\big) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Nadalje, za multiplikativan inverz kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}^\times$ imamo

$$z^{-1} = \frac{1}{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \frac{\cos\phi - i\sin\phi}{r(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} = \frac{1}{r}\,(\cos\phi - i\sin\phi)$$

Ova zapažanja moguće je sažeti u obliku sljedećih jednakosti

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 r_2 \ , \quad \mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \ , \tag{1.23}$$

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = r^{-1} \ , \quad \mathrm{Arg}(z^{-1}) = -\mathrm{Arg}(z) \ , \tag{1.24}$$

gdje su svi kompleksni brojevi u gornjim jednakostima različiti od 0. Odavde indukcijom slijedi

$$|z^n| = |z|^n \ , \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z) \tag{1.25}$$

za sve $n \in \mathbb{Z}$.

§ 1.3 Kompleksne funkcije

Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ podskup kompleksnih brojeva i $f : S \to \mathbb{C}$ zadano preslikavanje. Kažemo da je f funkcija kompleksne varijable. Funkciju kompleksne varijable uvijek možemo rastaviti na njen realni dio $u(x,y)$ i imaginarni dio $v(x,y)$,

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{1.26}$$

pri čemu podrazumijevamo da su $u, v : S_R \to \mathbb{R}$ funkcije dvije realne varijable, pri čemu je njihova domena

$$S_R = \{(x,y) \mid x+iy \in S\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Polinomi

Polinom n-tog stupnja je preslikavanje $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirano s

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1.27}$$

gdje su kompleksni koeficijenti $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, takvi da je $a_n \neq 0$. Općenito polinom n-tog stupnja posjeduje n nul-točaka, međutim, neke od njih mogu biti međusobno jednake.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana je s

$$\exp(z) \equiv e^x(\cos y + i \sin y) \tag{1.28}$$

Ponekad eksponencijanu funkciju zapisujemo i s $e^z = \exp(z)$. Kako su funkcije $\cos y$ i $\sin y$ periodične s osnovnim periodom 2π, slijedi da je eksponencijalna funkcija na kompleksnoj domeni periodična s osnovnim periodom $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{1.29}$$

Nadalje, valja uočiti kako vrijedi

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2} \tag{1.30}$$

Teorem 1.3. *Eksponencijalna funkcija nema nul-točaka.*

DOKAZ : Neka je $z = x + iy$. Jednadžba $\exp(z) = 0$ je ekvivalentna sa zahtjevom $\exp(x) = 0$ i/ili $\cos y + i \sin y = 0$. Ne postoje brojevi $x, y \in \mathbb{R}$ koji rješavaju ijednu od ovih jednadžbi. Naime, postoji više ekvivalentnih načina uvođenja realne funkcije $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ali ona uvijek mora zadovoljavati elementarna svojstva $\exp(0) = 1$ i $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$. Ako bi postojao $x \in \mathbb{R}$, takav da je $\exp(x) = 0$, tada bi vrijedilo $0 = \exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$, kontradikcija. Također, relacija $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ je u kontradikciji sa zahtjevom $\cos y = \sin y = 0$. □

Tradicionalno se izraz za eksponencijalnu funkciju čisto imaginarnih brojeva zove **Eulerova formula**,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1.31}$$

a specijalni slučaj dobiven za $x = \pi$ **Eulerov identitet**,

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \tag{1.32}$$

Ovaj potonji je posebno zanimljiv jer objedinjuje 5 važnih matematičkih konstanti, 0, 1, i, π, te e.

Eksponencijalna funkcija nam omogućuje da kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}^\times$ zapišemo u tzv. **polarnom obliku**,

$$z = r\, e^{i\phi} \tag{1.33}$$

Uz ovakav prikaz operacije s kompleksnim brojevima postaju mnogo preglednije: koristeći svojstvo dokazano u (1.30), imamo primjerice

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\phi_1+\phi_2)}\ ,\ \text{te} \quad z^n = r^n\, e^{in\phi} \tag{1.34}$$

za svaku cjelobrojnu potenciju $n \in \mathbb{Z}$. Koristeći kompleksni broj z jediničnog modula zapisan u polarnom obliku, $z = e^{i\phi}$, s lakoćom dolazimo do De Moivréovog teorema,

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (e^{i\phi})^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

Konačno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $z \in \mathbb{C}^\times$ jednadžba $w^n = z$ ima n rješenja, koja možemo elegantno zapisati u polarnom obliku,

$$w_k \;=\; \sqrt[n]{r}\, \exp\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\, i\right)\ , \quad k \in \mathbb{Z}_n \tag{1.35}$$

gdje je $\sqrt[n]{r} > 0$ "obični" n-ti korijen realnog broja r. Za sva rješenja w_k kažemo da su dobivena operacijom vađenja n-tog korijena iz kompleksnog broja z, kojeg najčešće pišemo kao $\sqrt[n]{z}$ ili $z^{1/n}$. Na primjer, rješenja jednadžbe $w^4 = 1$ dana su s

$$w_k = e^{k\pi i/2}\ , \quad k \in \{0,1,2,3\}$$

odnosno,

$$w_0 = e^{0i} = 1\ , \quad w_1 = e^{\pi i/2} = i\ , \quad w_2 = e^{\pi i} = -1\ , \quad w_3 = e^{3\pi i/2} = -i$$

Valja uočiti kako ova 4 kompleksna broja leže u vrhovima kvadrata upisanog u jediničnu kružnicu. Općenito, korijeni jednadžbe $w^n = 1$ leže u vrhovima pravilnog n-terokuta upisanog u jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu kompleksne ravnine.

Trigonometrijske funkcije

Sve trigonometrijske funkcije moguće je s realne proširiti na kompleksnu domenu. Za početak imamo funkcije $\cos z$ i $\sin z$,

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ , \quad \cos z \equiv \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}) \tag{1.36}$$

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ , \quad \sin z \equiv \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{1.37}$$

Funkcije $\sin z$ i $\cos z$ su periodične s realnim periodom 2π, a jedine nul-točke su njihove realne nul-točke,

$$\begin{aligned} \sin z_k = 0 &\quad \text{za} \quad z_k = k\pi \\ \cos z_k = 0 &\quad \text{za} \quad z_k = (2k+1)\pi/2 \end{aligned}$$

za $k \in \mathbb{Z}$. Funkcije $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ su definirane na cijelom skupu kompleksnih brojeva izuzev, redom, nul-točaka funkcije $\cos z$ i $\sin z$,

$$\operatorname{tg} z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}\ , \quad \operatorname{ctg} z \equiv \frac{\cos z}{\sin z} \tag{1.38}$$

$f(z)$	P_f	z_k	P_g	$g(z)$
$\sin z$	2π	$k\pi$	π	$\operatorname{tg} z$
$\cos z$	2π	$(2k+1)\pi/2$	π	$\operatorname{ctg} z$
$\operatorname{sh} z$	$2\pi i$	$k\pi i$	πi	$\operatorname{th} z$
$\operatorname{ch} z$	$2\pi i$	$(2k+1)\pi i/2$	πi	$\operatorname{cth} z$

Tablica 1.1: Periodi P_f, P_g i nul-točke z_k funkcija $f(z)$ i $g(z)$.

Funkcije $\operatorname{tg} z$ i $\operatorname{ctg} z$ su periodične s realnim periodom π, a jedine nul-točke su im, kao i kod funkcija $\sin z$ i $\cos z$, one realne ($\operatorname{tg} z$ ima iste nul-točke kao i $\sin z$, a $\operatorname{ctg} z$ iste nul-točke kao i $\cos z$).

Hiperboličke funkcije

Funkcije $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$ su preslikavanja definirana s

$$\operatorname{ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad \operatorname{ch} z \equiv \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \tag{1.39}$$

$$\operatorname{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad \operatorname{sh} z \equiv \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \tag{1.40}$$

Funkcije $\operatorname{sh}\ z$ i $\operatorname{ch}\ z$ su periodične s imaginarnim periodom $2\pi i$, a jedine nul-točke su njihove imaginarne nul-točke

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z_k &= 0 \quad \text{za} \quad z_k = k\pi i \\ \operatorname{ch} z_k &= 0 \quad \text{za} \quad z_k = (2k+1)\pi i/2 \end{aligned}$$

Funkcije $\operatorname{th} z$ i $\operatorname{cth} z$ su definirane na cijelom skupu kompleksnih brojeva izuzev, redom, nul-točaka funkcije $\operatorname{ch} z$ i $\operatorname{sh} z$,

$$\operatorname{th} z \equiv \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\,, \quad \operatorname{cth} z \equiv \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \tag{1.41}$$

Funkcije $\operatorname{th} z$ i $\operatorname{cth} z$ su periodične s imaginarnim periodom πi, a jedine nul-točke su im, kao i kod funkcija $\operatorname{sh} z$ i $\operatorname{ch} z$, one imaginarne ($\operatorname{th} z$ ima iste nul-točke kao i $\operatorname{sh} z$, a $\operatorname{cth} z$ iste nul-točke kao i $\operatorname{ch} z$).

Logaritamska funkcija

Kažemo da je kompleksni broj w **logaritam** broja z, $w = \operatorname{Ln}(z)$, ako vrijedi $\exp(w) = z$. Za bilo koji $z \neq 0$ ova definicija daje beskonačno mnogo vrijednosti logaritma danog broja z prema

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.42}$$

gdje je "ln" na desnoj strani jednadžbe "obični" prirodni logaritam definiran na skupu realnih brojeva. Kao i kod argumenta kompleksnog broja definiramo **glavnu vrijednost logaritamske funkcije**,

$$\ln(z) = \ln(r) + i\arg(z) \tag{1.43}$$

Imamo sljedeći niz primjera, uz $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ln}(1) = \ln(1) + i(\arg(1) + 2k\pi) = 2k\pi i \;, \quad \ln(1) = 0$$

$$\mathrm{Ln}(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \;, \quad \ln(i) = \frac{\pi i}{2}$$

$$\mathrm{Ln}(-i) = i\left(-\frac{\pi i}{2} + 2k\pi\right) \;, \quad \ln(-i) = -\frac{\pi i}{2}$$

Logaritam produkta kompleksnih brojeva moguće je, kao i kod realnih brojeva, napisati kao sumu logaritama,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) &= \ln|z_1 \cdot z_2| + i\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\mathrm{Arg}(z_1) + i\mathrm{Arg}(z_2) = \\ &= \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2) \end{aligned} \tag{1.44}$$

pri čemu smo koristili rastav logaritma produkta realnih brojeva i rastav argumenta produkta kompleksnih brojeva.

Potenciranje

Pomoću logaritamske funkcije moguće je definirati potenciranje i za kompleksnu potenciju. Za svaki $z \in \mathbb{C} - \{0, e\}$, te $w \in \mathbb{C}$ definiramo

$$z^w \equiv \exp(w \,\mathrm{Ln}\, z) \tag{1.45}$$

Ovako definirano potenciranje je općenito "višeznačna funkcija", uz iznimku kada je $w \in \mathbb{Z}$. Naime, u potonjem slučaju imamo

$$z^w = \exp\Big(w(\ln|z| + i\arg(z))\Big)\exp(2kw\pi i) = \exp\Big(w(\ln|z| + i\arg(z)\Big)$$

Razlog izuzimanja broja e kao baze potencije u gornjoj definiciji je čisto praktične naravi: u protivnom bismo imali nekonzistentan zapis, kao npr. u slučaju

$$e^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\,(1 + 2k\pi i)\right) = e^{1/2} e^{k\pi i} = (-1)^k e^{1/2} \quad (?!)$$

Zanimljiv je naredni primjer

$$i^i = \exp(i \,\mathrm{Ln}\, i) = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \;, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Kao i kod ranije definiranih funkcija, glavnu vrijednost potencije z^w možemo definirati pomoću glavne vrijednosti logaritma baze z,

$$\exp(w \,\ln z) \;,$$

no u literaturi ne postoji nekakva ustaljena (konvencionalna) posebna oznaka za ovu vrijednost potencije.

§ 1.4 Krivulje u kompleksnoj ravnini

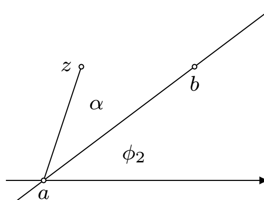
Korištenje kompleksnih brojeva nam ponekad olakšava zapis raznih krivulja u ravnini. Ovdje ćemo kratko izložiti nekoliko najvažniji primjera.

Pravci. Pravac je moguće zadati na nekoliko različitih načina. Pretpostavimo da želimo provući pravac kroz dvije različite točke $a, b \in \mathbb{C}$. Tada je za svaku točku z tog pravca, različitu od a i b, kut $\alpha = \measuredangle\, azb$ jednak 0 ili π. Sinus ovog kuta je stoga uvijek nula, što je moguće elegantno zapisati u sljedećem obliku

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b-a}\right) = 0 \tag{1.46}$$

Specijalno, za $z = a$ i $z = b$ ovo odmah slijedi, pa pretpostavimo da to nije slučaj. Tada možemo pisati $z - a = r_1 e^{i\phi_1}$, te $b - a = r_2 e^{i\phi_2}$, gdje su $r_1, r_2 \neq 0$, pa je

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b-a}\right) = \frac{r_1}{r_2}\,\sin(\phi_1 - \phi_2) = \frac{r_1}{r_2}\,\sin\alpha\;.$$



Ako je pravac definiran kao simetrala dužine zadane točkama z_1 i z_2, tada imamo zapis

$$|z - z_1| = |z - z_2| \tag{1.47}$$

Drugim riječima, simetrala se sastoji od točaka z jednako udaljenih od zadanih točaka z_1 i z_2. Konačno, pravac u kompleksnoj ravnini moguće je zapisati i pomoću 2 parametra, kompleksnog broja $c \in \mathbb{C}$ i realnog broja $p \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}(cz) = p \tag{1.48}$$

Naime, pretpostavimo li da je $c = \alpha + i\beta$, gornja jednadžba odgovara implicitnom obliku jednadžbe pravca u analitičkoj geometriji,

$$\alpha x - \beta y = p$$

Čunjosječnice. Tri klasične krivulje, elipsu, hiperbolu i parabolu, možemo zapisati upotrebom njihove geometrijske definicije. Elipsu (hiperbolu) sačinjavaju točke z čiji je zbroj (razlika) udaljenosti od dvije zadane točke z_1 i z_2 (*fokusa*) u kompleksnoj ravnini konstantan. Parabolu sačinjavaju točke z čija je udaljenost od zadane točke z_0 (*fokusa*) u kompleksnoj ravnini jednak zbroju apscise točke z i realne pozitivne konstante. Na primjer, jednadžba elipse se bitno komplicira ako joj osi s koordinatnim

osima zatvaraju kut koji nije višekratnik pravog kuta. Međutim, upotrebom kompleksnih brojeva svi slučajevi izgledaju jednako elegantno.

Elipsa s fokusima u z_1 i z_2 i velikom poluosi $a > 0$,

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \tag{1.49}$$

Specijalno, kružnica radijusa $r > 0$ sa središtem u točki z_0,

$$|z - z_0| = r \tag{1.50}$$

Hiperbola s fokusima u z_1 i z_2 i velikom poluosi $a > 0$,

$$\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a \tag{1.51}$$

Parabola s fokusom u z_0 i realnim pozitivnim parametrom $p > 0$,

$$|z - z_0| = \frac{p}{2} + \mathrm{Re}(z) \tag{1.52}$$

Upotrebom nejednakosti možemo definirati unutrašnjost elipse bez ruba,

$$|z - z_1| + |z - z_2| < 2a \tag{1.53}$$

kao i unutrašnjost elipse s rubom

$$|z - z_1| + |z - z_2| \le 2a \tag{1.54}$$

Komentar 1.4. Ako imam neku krivulju u kompleksnoj ravnini zadanu jednadžbom $f(z) = 0$, te je onda želimo zarotirati u pozitivnom smjeru za kut α, tada to jednostavno postižemo transformacijom početne jednadžbe u $f(ze^{-i\alpha}) = 0$. //

Promotrimo sada krivulje iz nešto općenitije perspektive …

Definicija 1.5. **Put** između točaka $a, b \in X$ je neprekidno preslikavanje $f : [0,1] \to X$, takvo da vrijedi $f(0) = a$ i $f(1) = b$. Topološki prostor X je **putevima povezan** ako za svaki par točaka $a, b \in X$ postoji put u X od a do b.

Definicija 1.6. Neka je X topološki prostor. Za svaku točku $p \in X$ definiramo **konstantan put** $\gamma_p : [0,1] \to X$ s $\gamma_p(t) = p$ za svaki $t \in [0,1]$. **Neprekidna deformacija puta** $\gamma : [0,1] \to X$ u put $\lambda : [0,1] \to X$ unutar skupa X je neprekidno preslikavanje $F : [0,1] \times [0,1] \to X$, takvo da za sve $t \in [0,1]$ vrijedi $F(t,0) = \gamma(t)$ i $F(t,1) = \lambda(t)$. Za skup topološki prostor X kažemo da je **jednostavno povezan** ako je povezan putevima i ako je svaki zatvoren put u X moguće neprekidno deformirati u konstantan put.

Definicija 1.7. Neka je $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ put u prostoru $\mathbb{R}^n$. Slika puta, $\gamma([0,1])$, je **krivulja** u prostoru $\mathbb{R}^n$. Ako je γ injekcija, odnosno ako dotična krivulja ne presjeca samu sebe, tada kažemo da je posrijedi **Jordanov luk**. Nadalje, **Jordanova krivulja** ili **jednostavna zatvorena krivulja** je slika neprekidne injekcije $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^n$, gdje S^1 označava kružnicu.

Teorem 1.8 (Jordan). *Neka je C Jordanova krivulja u ravnini $\mathbb{R}^2$. Tada se komplement $\mathbb{R}^2 - C$ može napisati kao unija dva neprazna disjunktna otvorena povezana skupa.*

§ 1.5 Riemannove plohe

Prikaz grafova funkcija ograničen je dvodimenzionalnošću ploha na kojima iscrtavamo crteže (papir, ploča). U slučaju realnih funkcija (jedne varijable) sve savršeno sjeda na svoje mjesto: vrijednost varijable na x-osi uparujemo s vrijednošću same funkcije na y-osi. U slučaju kada imamo realnu funkciju dvije varijable, još donekle možemo doskočiti "dimenzionalnom problemu" projiciranjem 3D crteža na 2D plohu. Međutim, u slučaju kompleksnih funkcija problemi u prikazu postaju još veći. Stoga obično reduciramo dio "informacije" (npr. prikazom samo realne ili samo imaginarne vrijednosti promatrane funkcije) ili crtamo u paru kompleksne ravnine domene i kodomene s naznačenim točkama koje povezuje promatrana funkcija.

Sada ćemo podrobnije razmotriti što se krije iza višeznačnosti nekih kompleksnih funkcija …

Primjer #1: $f(z) = \sqrt{z}$

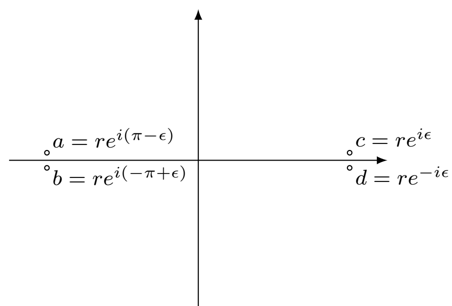
Uvodimo dvije pomoćen funkcije (dvije "grane" početne "funkcije"),

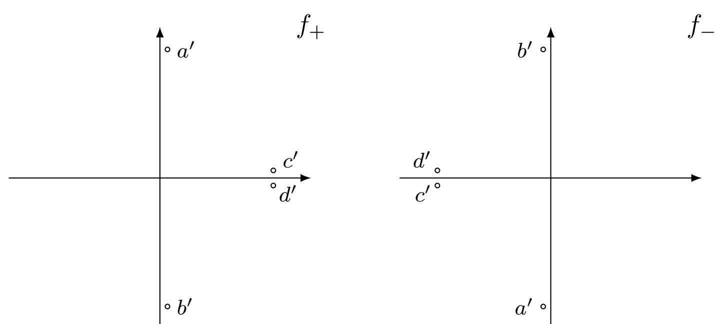
$$f_+(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \;, \quad f_-(re^{i\theta}) = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

Nadalje, razmotrit ćemo dva slučaja odabira područja argumenta kompleksnog broja.

a) $-\pi \le \theta < \pi$

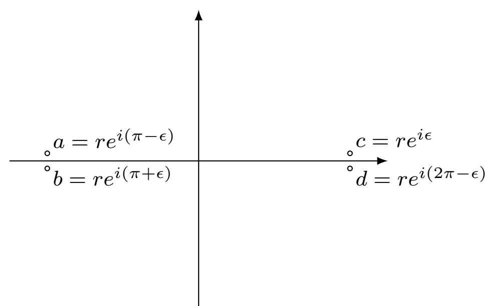
Promatramo 4 točke u domeni:

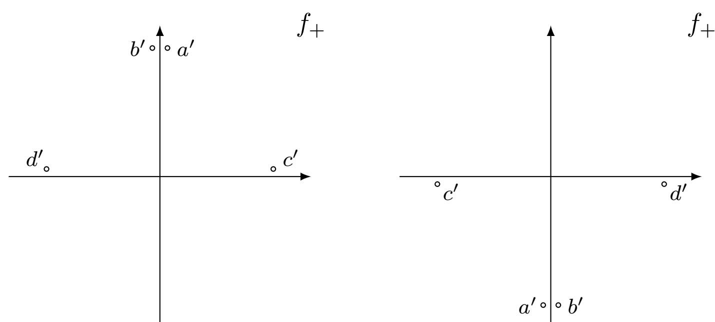




b) $0 \leq \theta < 2\pi$

Promatramo 4 točke u domeni:





U prvom slučaju imamo diskontinuitet, **rez**, duž negativne realne osi, a u drugom slučaju duž pozitivne realne osi. Ono što je zajedničko svakom odabiru reza jest **točka grananja**, koja je u slučaju ove funkcije ishodište, $z = 0$. Ako bismo htjeli prikazati obje grane, f_+ i f_-, *jednom* funkcijom, tada nam jedna kompleksna ravnina nije dovoljna za domenu. Umjesto toga, koristimo dvije kompleksne ravnine spojene preko rezova. Konačnu plohu zovemo **Riemannova ploha**, a njene dijelove (u ovom slučaju dvije kompleksne ravnine) **Riemannovi listovi**.

Primjer #2: $f(z) = \ln z$

Uvodimo beskonačno "grana",

$$f_k(z) = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

i opet razmatramo različite slučajeve odabira područja argumenta. Kao i u prethodnom primjeru, u slučaju područja argumenta $-\pi \leq \theta < \pi$ imamo rez duž negativne realne osi, a u slučaju područja argumenta $0 \leq \theta < 2\pi$ rez duž pozitivne realne osi.

U slučaju kada imamo konačan broj Riemannovih listova (kao kod z^q, gdje je $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$), obično govorimo o **algebarskom rezu**, a u protivnom, kada imamo beskonačan broj Riemannovih listova (kao kod $\ln(z)$ ili z^p, gdje je $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$), govorimo o **logaritamskom rezu**.

§ 1.6 Nizovi i redovi u $\mathbb{C}$

Definicija 1.9. **Niz** kompleksnih brojeva je preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Ako "članove" niza obilježimo sa $z_n = f(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada za niz koristimo oznake poput $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_n$ ili (z_n).

Definicija 1.10. Neka je $(z_n)_n$ niz kompleksnih brojeva. Tada je $g \in \mathbb{C}$ gomilište ovog niza ako svaka okolina $O_g \subseteq \mathbb{C}$ sadrži beskonačno mnogo (ne nužno međusobno različitih) njegovih članova. Ako za dani niz postoji točka $c \in \mathbb{C}$, takva da za svaku okolinu O_c postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da su $z_m \in O_c$ za sve $m \geq N$, tada kažemo da je dotični niz **konvergentan**, a za točku c kažemo da je **limes** tog niza.

Teorem 1.11. *Niz kompleksnih brojeva $(z_n)_n$ konvergira k broju $c = a + ib$ akko niz realnih brojeva $(\mathrm{Re}\, z_n)_n$ konvergira k broju a, a niz realnih brojeva $(\mathrm{Im}\, z_n)_n$ konvergira k broju b.*

DOKAZ : Pretpostavimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = b$$

Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n > N$ vrijedi

$$|a - x_n| < \epsilon/2 \quad \text{i} \quad |b - y_n| < \epsilon/2$$

gdje su $x_n = \operatorname{Re} z_n$, te $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Koristeći nejednakost trokuta, odavde slijedi

$$|c - z_n| = |(a - x_n) + i(b - y_n)| \le |a - x_n| + |b - y_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

i stoga $\lim_{n\to\infty} z_n = c$. Obratno, pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za svaki $n > N$ vrijedi $|c - z_n| < \epsilon$. Kako je uvijek $|\operatorname{Re}(z)| \le |z|$ i $|\operatorname{Im}(z)| \le |z|$, odavde slijedi

$$|a - x_n| < \epsilon \quad \text{i} \quad |b - y_n| < \epsilon\,,$$

čime je pokazana tvrdnja. □

Definicija 1.12. Neka je $(z_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$, a $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ parcijalna suma, odnosno suma prvih n članova tog niza. **Red** je niz parcijalnih suma $(s_n)_n$, ponekad skraćeno zapisana kao $\sum z_k$. Ako postoji limes $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, kažemo da je red *konvergentan*, a broj s zovemo **suma reda**. U protivnom, ako red nije konvergentan, onda kažemo da je *divergentan*. Za red $\sum z_k$ kažemo da je **apsolutno konvergentan** ako je red $\sum |z_k|$ konvergentan.

Komentar 1.13. Lako se vidi da u slučaju kada je red $\sum z_n$ konvergentan mora vrijediti $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Naime, ako parcijalne sume označimo sa

$$s_n \equiv \sum_{k=1}^{n} z_k$$

tada po pretpostavci postoji limes $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ te je

$$0 = s - s = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} z_n\,.$$

//

Testovi konvergencije. Neka je $\sum z_n$ red kompleksnih brojeva. Nas zanima kako provjeriti da li je ovaj red konvergentan. Na raspolaganju nam je više testova, među kojima izdvajamo nekoliko najvažnijih,

- **Test usporedbom**. Ako je $\sum w_n$ apsolutno konvergentan red i vrijedi $|z_k| \le |w_k|$ za sve $k \ge N \in \mathbb{N}$, tada je red $\sum z_n$ apsolutno konvergentan. Obratno, ako je $\sum w_k$ apsolutno divergentan red i vrijedi $|z_k| \ge |w_k|$ za sve $k \ge N \in \mathbb{N}$, tada je red $\sum z_n$ apsolutno divergentan.

  DOKAZ : Izostavljajući početni, konačan dio sume (koji ne utječe na konvergentnost), za svaki $M \ge N$ imamo

$$\sum_{k=N}^{M} |z_k| \le \sum_{k=N}^{M} |w_k| \le \sum_{k=N}^{\infty} |w_k| < \infty$$

Odavde slijedi da niz parcijalnih suma s lijeve strane omeđen rastući niz, pa stoga i konvergentan. Obratno, u slučaju kada je $\sum w_n$ apsolutno divergentan red, tada parcijalne sume $\sum_n^M |w_n|$ neomeđeno rastu, pa isto vrijedi za parcijalne sume $\sum_n^M |z_n|$ te je red $\sum z_n$ stoga apsolutno divergentan. □

- **Test omjerom** (D'Alembertov test). Ako postoji pozitivan realan broj r i prirodan broj $N \in \mathbb{N}$, takav da vrijedi $z_n \neq 0$ i $|z_{n+1}/z_n| \leq r < 1$ za sve $n \geq N$, tada je red $\sum |z_n|$ konvergentan. U protivnom, ako vrijedi $z_n \neq 0$ i $|z_{n+1}/z_n| \geq 1$ za sve $n \geq N$, tada je red $\sum z_n$ divergentan.

  DOKAZ : Iz pretpostavke indukcijom slijedi

$$|z_{N+k}| \leq r|z_{N+k-1}| \leq r^2|z_{N+k-2}| \leq \cdots \leq r^k|z_N|$$

  S jedne strane imamo (početni, konačni dio sume ne utječe na pitanje konvergencije),

$$\sum_{j=N}^{\infty} |z_j| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_{k+N}| \ ,$$

  a s druge strane

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k |z_N| = \frac{|z_N|}{1-r} < \infty$$

  Koristeći test usporedbom slijedi tvrdnja o (apsolutnoj) konvergenciji reda. Obratna tvrdnja o divergenciji vrijedi jer iz pretpostavke $|z_{n+1}/z_n| \geq 1$ slijedi $\lim_{n\to\infty} |z_n| \neq 0$ i stoga $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$. □

- **Korijenski test** (Cauchyjev test). Ako postoji pozitivan realan broj r i prirodan broj $N \in \mathbb{N}$, takav da vrijedi $\sqrt[n]{|z_n|} \leq r < 1$ za sve $n \geq N$, tada je red $\sum |z_n|$ konvergentan. U protivnom, ako vrijedi $\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$ za sve $n \geq N$, tada je red $\sum z_n$ divergentan.

  DOKAZ : Iz pretpostavke slijedi $|z_n| \leq r^n$ za sve $n \geq N$. Kao i u prethodnom dokazu s jedne strane imamo

$$\sum_{j=N}^{\infty} |z_j| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_{k+N}|$$

  a s druge

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{k+N} = \frac{r^N}{1-r} < \infty$$

  Koristeći test usporedbom slijedi tvrdnja o (apsolutnoj) konvergenciji reda. Obratna tvrdnja o divergenciji vrijedi jer iz pretpostavke slijedi $|z_n| \geq 1$ za sve $n \geq N$ i stoga $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$. □

Komentar 1.14. Ako smo pomoću testa usporedbom zaključili kako je neki red apsolutno divergentan, taj test nam općenito ne dopušta da razlučimo je li takav red kovergentan ili divergentan. Na primjer, promotrimo redove $\sum z_n$, $\sum z'_n$ i $\sum w_n$ zadanima s $z_n = (-1)^n/n$, $z'_n = 1/n$ i $w_n = (-1)^{n+1}/(n+1)$. Red $\sum w_n$ je apsolutno divergentan i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|z_n| = |z'_n| \geq |w_n|$, te stoga pomoću testa usporedbom možemo zaključiti da su $\sum z_n$ i $\sum z'_n$ apsolutno divergentni. Međutim $\sum z_n$ je konvergentan, a $\sum z'_n$ divergentan red. //

Komentar 1.15. Primjetimo kako gore navedeni testovi ništa ne govore u slučaju kada je $r = 1$. Tada valja posegnuti za nekim složenijim testovima konvergencije (vidi dodatak B). //

Teorem 1.16. *Niz kompleksnih brojeva $(z_n)_n$ je Cauchyjev niz akko je konvergentan.*

Dokaz : Pretpostavimo da je niz $(z_n)_n$ konvergentan, te $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da je $|z_n - z| < \epsilon/2$ za sve $n \geq N$. Koristeći nejednakost trokuta onda imamo

$$|z_m - z_n| = |(z_m - z) + (z - z_n)| \leq |z_m - z| + |z_n - z| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

za sve $m, n \geq N$. Drugim riječima, niz $(z_n)_n$ je Cauchyjev niz. Obratno, pretpostavimo da je $(z_n)_n$ Cauchyjev niz. Uz standardni zapis $z_n = x_n + iy_n$, koristeći $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ i $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$, imamo $|x_m - x_n| \leq |z_m - z_n|$ i $|y_m - y_n| \leq |z_m - z_n|$. Ovo odmah povlači da su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi realnih brojeva, pa su nužno i konvergentni. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. No, to znači da je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x + iy$$

□

Teorem 1.17. *Apsolutno konvergentan red kompleksnih brojeva $\sum z_n$ je nužno konvergentan i vrijedi*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

Dokaz : Pretpostavimo da je red kompleksnih brojeva $\sum z_n$ apsolutno konvergentan. Tada je, prema Teoremu 1.16 niz parcijalnih suma $(\sum_{n=1}^{p} |z_n|)_p$ Cauchyjev niz pa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $p > q \geq N$ vrijedi

$$\left| \sum_{n=1}^{p} z_n - \sum_{n=1}^{q} z_n \right| = \left| \sum_{n=q+1}^{p} z_n \right| \leq \sum_{n=q+1}^{p} |z_n| =$$

$$= \sum_{n=1}^{p} |z_n| - \sum_{n=1}^{q} |z_n| = \left| \sum_{n=1}^{p} |z_n| - \sum_{n=1}^{q} |z_n| \right| < \epsilon$$

Ovo povlači da je i niz parcijalnih suma $(\sum_{n=1}^{p} z_n)_p$ Cauchyjev niz pa je prema Teoremu 1.16 red $\sum z_n$ konvergentan. Nejednakost u teoremu vrijedi za parcijalne sume, pa ista slijedi i za njihove limese. □

Komentar 1.18. Korištenjem Cauchyjevim nizova možemo opet izvesti osnovni kriterij divergiranja nekog reda. Ako je neki općeniti red $\sum_k z_k$ konvergentan, tada su parcijalne sume $s_n = \sum_k^n z_k$ Cauchyjev niz. Specijalno, to znači da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$ vrijedi

$$|z_n| = |s_n - s_{n-1}| < \epsilon$$

Drugim riječima $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$. Obratno, ako ovo ne vrijedi, tada je promatrani red $\sum_k z_k$ nužno divergentan. //

Definicija 1.19. **Niz kompleksnih funkcija** $(f_n)_n$ definiranih na skupu $S \subseteq \mathbb{C}$ je preslikavanje koje svakom prirodnom broju n pridružuje funkciju $f_n : S \to \mathbb{C}$. **Red kompleksnih funkcija** je niz parcijalnih suma $\sum_k^n f_k$.

Red potencija je red funkcija $f_k(z) = a_k(z - z_0)^k$. Ako nije posebno naglašeno drugačije, obično se podrazumijeva da suma u redu potencija ide od "nultog" člana,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

ili skraćeno zapisano $\sum a_k(z - z_0)^k$.

Teorem 1.20. *Neka je $\sum a_n(z - z_0)^n$ red potencija. Ako ovaj red ne konvergira apsolutno za sve $z \in \mathbb{C}$, tada postoji realan broj $R \geq 0$ takav da red konvergira apsolutno za sve $|z-z_0| < R$, odnosno ne konvergira apsolutno za sve $|z-z_0| > R$.*

DOKAZ : Uvedimo pomoćnu varijablu $w = z - z_0$ i pretpostavimo da red $\sum a_n w^n$ ne konvergira apsolutno za sve $w \in \mathbb{C}$. Promotrimo pomoćni red $\sum |a_n| s^n$ s realnom varijablom $s \geq 0$. Označimo sa $S \subseteq [0, +\infty\rangle$ skup realnih brojeva za koje red $\sum |a_n| s^n$ konvergira. Prvo, skup S je neprazan jer je $0 \in S$. Drugo, skup S je omeđen jer bi u protivnom testom usporedbe slijedilo da je $\sum a_n w^n$ apsolutno konvergentan za sve $w \in \mathbb{C}$. Stoga, skup S ima supremum kojeg možemo označiti s $R \equiv \sup S$. Opet, pomoću testa usporedbom, vidimo da je red $\sum a_n w^n$ apsolutno konvergentan za sve $|w| < R$, odnosno apsolutno divergentan za sve $|w| > R$. □

Definicija 1.21. Broj R u prethodnom teoremu zovemo **radijus konvergencije** reda $\sum a_n(z - z_0)^n$. Ako je red apsolutno konvergentan za sve $z \in \mathbb{C}$ tada je formalno $R = +\infty$. Obratno, ako je $R = 0$, tada red $\sum a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno samo za $z = z_0$.

Komentar 1.22. U teoremu ispod ćemo dokazati kako vrijedi i nešto jača tvrdnja: red potencija nužno divergira van radijusa konvergencije. //

Na primjer, red $\sum z^n$ ima radijus konvergencije $R = 1$, red $\sum_n z^n/n!$ ima radijus konvergencije $R = +\infty$, a red $\sum_n n! z^n$ radijus konvergencije $R = 0$ (apsolutno je konvergentan samo u $z = 0$).

Sada nas zanima eksplicitan način računanja radijusa konvergencije zadanog niza kompleksnih brojeva.

Teorem 1.23 (Cauchy-Hadamard). *Radijus konvergencije reda potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dan je izrazom

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

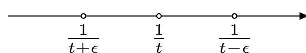
te je promatrani red divergentan za sve $|z - z_0| > R$.

Dokaz : Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $z_0 = 0$. Želimo dokazati da red apsolutno konvergira za $|z| < R$ i divergira za $|z| > R$.

Neka je $t = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ i pretpostavimo za početak da je $t \neq 0, \infty$. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji samo konačno mnogo brojeva $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $|a_n|^{1/n} > t + \epsilon$. Dakle, za sve osim konačno mnogo brojeva $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|a_n| \le (t + \epsilon)^n \ .$$

Ako je $|z| < (t + \epsilon)^{-1}$, tada postoji realan broj $r > 0$ za koji vrijedi $|z| < r < (t + \epsilon)^{-1}$. Geometrijski red $\sum (t + \epsilon)^n r^n$ je konvergentan pa pomoću testa usporedbom slijedi da je red $\sum a_n z^n$ apsolutno konvergentan kada je $|z| < (t + \epsilon)^{-1}$. Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $R \ge (t + \epsilon)^{-1}$ i stoga je $R \ge 1/t$.



Obratno, za svaki $\epsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo brojeva $n \in \mathbb{N}$ takvih da je $|a_n|^{1/n} \ge t - \epsilon > 0$, odnosno

$$|a_n| \ge (t - \epsilon)^n \ .$$

Ako je $|z| > (t - \epsilon)^{-1}$ tada postoji beskonačno mnogo brojeva $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$|a_n z^n| > \frac{|a_n|}{(t - \epsilon)^n} \ge 1 \ .$$

Stoga, opći član sume $a_n z^n$ ne teži u nulu kad god je $|z| > (t - \epsilon)^{-1}$ pa je takav red divergentan (a onda ujedno i apsolutno divergentan). Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $R \le (t - \epsilon)^{-1}$ i stoga je $R \le 1/t$. Iz dvije dobivene premise slijedi tvrdnja, $R = 1/t$.

Analiza slučajeva $t = 0$ i $t = \infty$ je analogna. □

Komentar 1.24. Zašto se u Cauchy-Hadamardovom teoremu pojavljuje lim sup, a ne lim inf? Neka je $w = \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji beskonačno brojeva $n \in \mathbb{N}$ takvih da je $|a_n| \le (w + \epsilon)^n$. No, ova informacija nam nije dovoljna kako bi ustanovili je li red $\sum a_n z^n$ općenito apsolutno konvergentan za sve $|z| < 1/(w + \epsilon)$. Naime, trebali bismo znati da $|a_n| \le (w + \epsilon)^n$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$ osim eventualno konačno mnogo njih, što će vrijedi samo u nekim specijalnim slučajevima. //

Primjer(i) 1.25. Promotrimo naredne primjere,

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}\ , \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n\ , \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

Prvo valja uočiti da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Naime, kako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sqrt[n]{n} \ge 1$, postoji $\delta_n \ge 0$, takav da je $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$. Tada, koristeći binomni poučak, imamo

$$n = (1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \binom{n}{2}\delta_n^2 + \dots$$

$$n > \binom{n}{2}\delta_n^2 \ \Rightarrow\ 0 \le \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Tada po "sendvič teoremu" slijedi $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, a otuda i tražena tvrdnja. Odavde nadalje slijedi i to da je radijus konvergencije u sva tri reda jednak $R = 1$ (može se pokazati da su kod konvergentnih nizova limes supremum i limes infimum međusobno jednaki i jednaki limesu tog niza). No, nas zanima i što se događa s ovim redovima na samoj granici apsolutne konvergencije, jediničnoj kružnici $|z| = R = 1$.

U slučaju (a), usporedbom s konvergentnim nizom $\sum n^{-2}$, zaključujemo kako je promatrani red apsolutno konvergentan, a onda i konvergentan za sve $|z| = 1$. U slučaju (b) možemo se jednostavno uvjeriti da promatrani red divergira za sve $|z| = 1$. Naime, kako je za $z = \exp(i\varphi)$

$$\lim_{n\to\infty} nz^n = \lim_{n\to\infty} ne^{in\varphi} \ne 0$$

red $\sum nz^n$ je divergentan za sve $|z| = 1$. Konačno, u slučaju (c) znamo da je promatrani red divergentan u $z = 1$ (kada se svodi na harmonijski red), dok u ostalim točkama jedinične kružnice $|z| = 1$ konvergira (ovo se može primjerice provjeriti tzv. Dirichletovim testom). //

Definicija 1.26. Neka je $(f_n)_n$ niz funkcija definiranih na skupu $S \subseteq \mathbb{C}$. Kažemo niz funkcija $(f_n)_n$

konvergira po točkama k funkciji $f : S \to \mathbb{C}$ ako za

$$(\forall\, \epsilon > 0)(\forall\, z \in S)(\exists N(\epsilon, z) \in \mathbb{N})(\forall\, n \ge N) :\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon\ ;$$

konvergira uniformno na skupu S k funkciji $f : S \to \mathbb{C}$ ako

$$(\forall\, \epsilon > 0)(\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall\, n \ge N)(\forall\, z \in S) :\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon\ .$$

Komentar 1.27. Uniformna konvergencija implicira konvergenciju po točkama, ali obrat općenito ne vrijedi. Primjer: niz funkcija $f_n(z) = |z|^n$ na otvorenom disku $B(0,1)$ teži po točkama u konstantnu funkciju $f(z) = 0$. Međutim, za svaki $\epsilon \in \langle 0, 1\rangle$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $z_0 \in B(0,1)$ za koji vrijedi $|f_n(z_0) - f(z_0)| \ge \epsilon$ (konkretno, to vrijedi za svaki $z_0 \in \langle \epsilon^{1/n}, 1\rangle$), pa ovaj niz funkcija ne konvergira uniformno k funkciji f. //

Teorem 1.28 (Weierstraßov M-test). *Neka je $\sum f_n$ red funkcija definiranih na skupu $S \subseteq \mathbb{C}$. Ako postoji niz $(M_n)_n$ nenegativnih realnih brojeva, takav da je*

(a) $\sum M_n < \infty$ *, i*

(b) $|f_n(z)| \le M_n$ *za sve* $z \in S$.

tada red funkcija $\sum f_n$ konvergira apsolutno (po točkama) i uniformno na skupu S.

Dokaz : Pretpostavimo da su zadovoljene pretpostavke iz teorema. Testom usporedbe odmah vidimo da red $\sum |f_n(z)|$ konvergira za sve $z \in S$. Označimo rezultantnu funkciju sa $s(z) = \sum f_n(z)$. Nadalje, želimo dokazati da parcijalne sume reda $\sum f_n(z)$ uniformno konvergiraju na skupu S. Promotrimo parcijalne sume

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \qquad \text{i} \qquad \sigma_n \equiv \sum_{k=0}^{n} M_k \ .$$

Kako je $(\sigma_n)_n$ po pretpostavci konvergentan niz realnih brojeva, tada je on i Cauchyjev niz pa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \ge N$ vrijedi

$$|s_m(z) - s_n(z)| \le \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k = \sigma_m - \sigma_n < \epsilon$$

Primjetimo, parcijalne sume s_n zadovoljavaju Cauchyjevo svojstvo *neovisno* o izboru varijable z: za dani $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ koji povlači gore izvedenu nejednakost *za sve* $z \in S$. Stoga, ponavljanjem dedukcije u lemi 0.81 i teoremu 1.16, možemo zaključiti kako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \ge N$ i sve $z \in S$ vrijedi

$$|s(z) - s_n(z)| \le \epsilon \ .$$

Drugim riječima, red funkcija $\sum f_n$ konvergira uniformno na skupu S. □

Primjer(i) 1.29. Red $\exp(z) = \sum z^n/n!$ konvergira uniformno na svakom zatvorenom disku $\overline{B(0,R)}$ radijusa $R > 0$. Naime, za svaki $z \in \overline{B(0,R)}$ vrijedi

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} \le \frac{R^n}{n!}$$

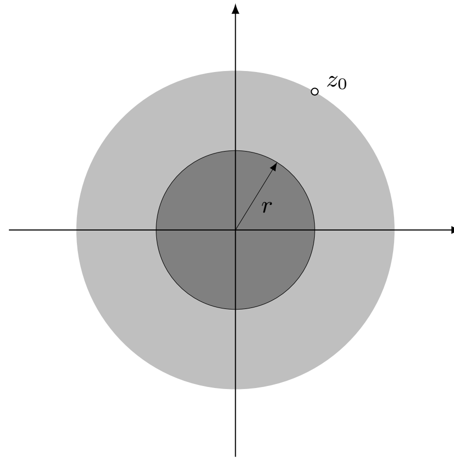
pa upotrebom gornjih međa $M_n = R^n/n!$ u Weierstraßovom M-testu (konvergentnost reda $\sum M_n$ se jednostavno provjeri testom omjerom) slijedi tvrdnja. Valja uočiti kako u ovom slučaju *ne slijedi* da promatrani red konvergira uniformno i na *cijeloj* kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$. Naime, promatramo li točke duž negativne realne osi, $z = x < 0$, i uvedemo uobičajenu pokratu za parcijalne sume $s_n = \sum^n z^k/k!$, tada razlika $|\exp(x) - s_n(x)|$ neomeđeno raste kako $x \to -\infty$ pa uvijet uniformne konvergencije nikako ne može biti ispunjen (na cijelom $\mathbb{C}$). //

Komentar 1.30. Možemo se pitati: ako je zadan uniformno konvergentan red funkcija, postoji li nužno niz (M_n) koji zadovoljava svojstva iz Weierstraßovog teorema? Odgovor je negativan jer imamo primjere poput niza funkcija $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, zadane s

$$f_n(z) = \begin{cases} 1/n \ , & n-1 \le |z| < n \\ 0 \ , & \text{inače} \end{cases}$$

Red $\sum f_n(z)$ konvergira apsolutno po točkama i uniformno na cijelom $\mathbb{C}$. Međutim, najmanja gornja međa za pojedine funkcije u sumi je $|f_n(z)| \leq 1/n$, a red $\sum 1/n$ je divergentan! Stoga, Weierstraßov M-test je dovoljan, ali ne i nužan test uniformne konvergencije. //

Teorem 1.31 (Abel). *Neka red $\sum a_n z^n$ konvergira za neki $z = z_0 \neq 0$. Tada on konvergira apsolutno za svaki $z \in B(0, |z_0|)$ te konvergira uniformno na zatvorenom disku $\overline{B(0,r)} \subseteq B(0, |z_0|)$ za svaki $r < |z_0|$.*



Dokaz : Pretpostavimo da je $\sum a_n z^n$ konvergentan za $z = z_0$. Tada je niz parcijalnih suma $(\sum_{n=0}^{p} a_n z_0^n)_p$ Cauchyjev niz, pa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $p > q \geq N$ vrijedi

$$\epsilon > \left| \sum_{n=0}^{p} a_n z_0^n - \sum_{n=0}^{q} a_n z_0^n \right| = \left| \sum_{n=q+1}^{p} a_n z_0^n \right|$$

Specijalno, za $q = p - 1$ imamo

$$|a_p z_0^p| < \epsilon$$

To znači da je niz $(|a_n z_0^n|)_n$ omeđen, odnosno postoji pozitivna realna konstanta K, takva da je $|a_n z_0^n| \leq K$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

- Apsolutna konvergencija: za sve $z \in B(0, |z_0|)$ i $N \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{N} |a_n z_0^n| \cdot \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq K \sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^n}{|z_0|^n}$$

  U limesu kada $N \to \infty$ s desne strane nejednakosti imamo konvergentan red, a s lijeve niz nepadajućih omeđenih parcijalnih suma, koje su stoga konvergentne.

- Uniformna konvergencija: neka je $r < |z_0|$ i

$$M_n = K \, \frac{r^n}{|z_0|^n} \; .$$

Red $\sum_n M_n$ konvergira jer je $r < |z_0|$. Nadalje, za svaki $z \in \overline{B(0,r)}$ vrijedi

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \, \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq K \, \frac{r^n}{|z_0|^n} = M_n$$

pa po Weierstraßovom M-testu red $\sum a_n z^n$ uniformno konvergira na zatvorenom disku $\overline{B(0,r)}$.

□

Komentar 1.32. Možemo li (naivno) zaključiti kako pod danim pretpostavkama iz Abelovog teorema slijedi i to da red $\sum_n a_n z^n$ uniformno konvergira i na *otvorenom disku* $B(0,|z_0|)$? Općenito, odgovor je *negativan.* Na primjer, red $\sum z^n/n$ konvergira u točki $z_0 = -1$, ali *nije* uniformno konvergentan na otvorenom disku $B(0,1)$. Općenito, ako je radijus konvergencije nekog reda potencija $R > 0$, tada on ne mora nužno uniformno konvergirati na otvorenom disku $B(0,R)$, ali po Abelovom teoremu sigurno uniformno konvergira na $\overline{B(0,r)}$ za svaki $r \in \langle 0, R \rangle$. Takav slučaj možemo vidjeti i kod reda $\sum z^n$ s radijusom konvergencije $R = 1$ koji *nije* uniformno konvergentan na otvorenom disku $B(0,1)$. //

§ 1.7 Neprekidnost i derivabilnost kompleksnih funkcija

Definicija 1.33. Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ i $f : S \to \mathbb{C}$. Kažemo da je funkcija f **neprekidna u točki** $z_0 \in S$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za svaki $z \in B(z_0,\delta) \cap S$ vrijedi $f(z) \in B(f(z_0),\epsilon)$ ili, kraće pisano,

$$f(B(z_0,\delta) \cap S) \subseteq B(f(z_0),\epsilon)$$

Nadalje, kažemo da je funkcija f neprekidna ako je neprekidna u svim točkama svoje domene.

Na primjer, $f(z) = z$, $g(z) = z^*$ i $h(z) = |z|$ su neprekidne funkcije. Za svaki $\epsilon > 0$ možemo jednostavno odabrati $\delta = \epsilon$: $|z - z_0| < \epsilon$ povlači

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \epsilon$$

$$|g(z) - g(z_0)| = |z^* - z_0^*| = |(z - z_0)^*| = |z - z_0| < \epsilon$$

$$|h(z) - h(z_0)| = ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \epsilon$$

Teorem 1.34. *Neka su f i g neprekidne kompleksne funkcije. Tada je neprekidan i njihov zbroj $f + g$, razlika $f - g$, produkt fg, te kompozicija $f \circ g$. Nadalje, u svim točkama gdje je $g(z) \neq 0$ i njihov omjer f/g je neprekidna funkcija.*

Teorem 1.35. *Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ i $(f_n)_n$ niz neprekidnih funkcija definiranih na S koje uniformno konvergiraju k funkciji $f : S \to \mathbb{C}$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz : Po pretpostavkama teorema, za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ i $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$ i $z \in B(z_0, \delta)$ vrijedi

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| <$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

gdje smo u prvoj nejednakosti iskoristili nejednakost trokuta, a u drugoj redom uniformnu konvergentnost niza $(f_n)_n$, neprekidnost svake pojedinačne funkcije f_n i opet uniformnu konvergentnost $(f_n)_n$. Drugim riječima, funkcija f je neprekidna za sve $z_0 \in S$. □

Definicija 1.36. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup, te $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija. Kažemo da je funkcija f **analitička u točki** $z_0 \in \Omega$ ako postoji $r > 0$, takav da je funkciju f moguće prikazati pomoću apsolutno konvergentnog reda potencija,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.55}$$

za sve $z \in B(z_0, r) \subseteq \Omega$. Kažemo da je funkcija f **analitička** na otvorenom skupu $O \subseteq \Omega$ ako je analitička u svakoj točki tog skupa. Ako neki skup $S \subseteq \Omega$ nije otvoren, tada kažemo da je funkcija f analitička na S ako je ovaj skup sadržan u otvorenom skupu $O \subseteq \Omega$ na kojem je f analitička. Ako nije posebno napomenuto, podrazumijeva se da fraza "funkcija f je analitička" znači "funkcija f je analitička na svojoj domeni".

Lema 1.37. *Ako je dvostruka suma apsolutno konvergentna,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |z_{kl}| \right) < \infty \, ,$$

tada poredak sumacije možemo promjeniti bez da se promjeni rezultat,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} z_{kl} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z_{kl} \right) \, .$$

Teorem 1.38. *Neka je $f(z) = \sum a_n z^n$ red potencija čiji je radijus konvergencije r. Tada je f analitička funkcija na otvorenom disku $B(0, r)$.*

Dokaz : Moramo dokazati da je funkcija f analitička u proizvoljnoj točki $z_0 \in B(0,r)$, pa vrijedi $|z_0| < r$. Neka je $s > 0$ realan broj, takav da je $|z_0| + s < r$, odnosno $B(z_0, s) \subseteq B(0,r)$. Koristit ćemo rastav

$$z = z_0 + (z - z_0)\,, \qquad z^n = \big(z_0 + (z - z_0)\big)^n$$

Tada je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k \right)$$

Sada bismo htjeli promjeniti poredak sumacije, ali se prvo moramo uvjeriti da je gore napisan red apsolutno konvergentan. Ako je $|z - z_0| < s$, tada vrijedi i $|z_0| + |z - z_0| < r - s + s = r$, a po pretpostavci je red $\sum |a_n|\,|w|^n$ konvergentan za sve $|w| < r$. To znači da je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \big(|z_0| + |z - z_0|\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |z - z_0|^k \right)$$

konvergentan i stoga možemo promjeniti poredak sumiranja. Konačno imamo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k$$

i znamo da je ovaj red apsolutno konvergentan, što smo i htjeli pokazati. □

Komentar 1.39. Koristeći translaciju $z \mapsto z + w$ prethodni teorem odmah možemo proširiti na otvorene diskove sa središtem u proizvoljnom kompleksnom broju $w \in \mathbb{C}$. //

Teorem 1.40. *Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ neki neprazan podskup kompleksnih brojeva i $f, g : S \to \mathbb{C}$ analitičke funkcije. Tada su i $f + g$, te fg analitičke funkcije na skupu S. Nadalje, omjer f/g je analitička funkcija na svakom otvorenom skupu $O \subseteq S$, gdje je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in O$. Konačno, ako su $g : U \to V$ i $f : V \to \mathbb{C}$ analitičke funkcije, tada je i njihova kompozicija $f \circ g$ analitička funkcija.*

Definicija 1.41. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zadana kompleksna funkcija. Kažemo da je f **derivabilna u točki** $z_0 \in \Omega$ ako postoji limes

$$f'(z_0) \equiv \left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} \equiv \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$$

U tom slučaju taj limes zovemo **derivacija funkcije** f **u točki** z_0. Ako točka z_0 ima okolinu $O_{z_0} \subseteq \Omega$, takvu da je f derivabila u svakoj točki $z \in O_{z_0}$, tada kažemo da je f **holomorfna u točki** z_0. Ako je funkcija f holomorfna na cijeloj domeni Ω, tada pišemo $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Ako je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorna na cijelom skupu $\mathbb{C}$, tada kažemo da je ona **cijela funkcija** (engl. entire function).

Na primjer, $f(z) = z$ je cijela funkcija (jedina kojoj je restrikcija na realnim brojevima identitet $f(x) = x$). S druge strane, $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ *nigdje nije* derivabilna. Naime, usporedimo li limes duž realne osi s limesom duž imaginarne osi imamo

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(z+\epsilon)-f(z)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon)-x}{\epsilon} = 1$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(z+i\epsilon)-f(z)}{i\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x-x}{i\epsilon} = 0$$

pa derivacija uopće nije dobro definirana. Poučeni ovim primjerom izvest ćemo praktičan test u obliku nužnog (ali ne i dovoljnog!) uvjeta koji moraju zadovoljavati holomorfne funkcije.

Teorem 1.42 (Cauchy-Riemann). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup, te $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija derivabilna u točki $z \in \Omega$. Tada funkcija f u točki z nužno zadovoljava tzv.* **Cauchy-Riemannove uvjete** *(skraćeno, C-R uvjete),*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{1.56}$$

Ako je f holomorfna na otvorenom skupu $O \subseteq \Omega$, tada su C-R uvjeti ispunjeni u svim točkama skupa O.

Dokaz : Po definiciji,

$$f'(z) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z+w)-f(z)}{w}$$

Prvo ćemo gledati derivaciju duž realne osi ($w = \epsilon \in \mathbb{R}$), a onda duž imaginarne osi ($w = i\epsilon$),

$$f'(z) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(z+\epsilon)-f(z)}{\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(x+\epsilon,y)-u(x,y)+i\left(v(x+\epsilon,y)-v(x,y)\right)}{\epsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(z+i\epsilon)-f(z)}{i\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(x,y+\epsilon)-u(x,y)+i\big(v(x,y+\epsilon)-v(x,y)\big)}{i\epsilon} = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Kako bi ova dva rezultata bili konzistentni, realni i imaginarni dijelovi moraju biti jednaki, što nam upravo daje Cauchy-Riemannove uvjete. □

Promotrimo primjer funkcije $g(z) = |z|$,

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad v(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Vidimo da funkcija $|z|$ ne zadovoljava C-R uvjete u niti jednoj točki $z \neq 0$. Specijalno, promotrimo li derivaciju u točki $z = 0$ pomoću limesa duž realne i imaginarne osi,

$$\lim_{\epsilon\to 0^\pm} \frac{g(0+\epsilon)-g(0)}{\epsilon} = \pm 1\,, \quad \lim_{\epsilon\to 0^\pm} \frac{g(0+i\epsilon)-g(0)}{i\epsilon} = \mp i$$

vidimo da ona niti tamo nije dobro definirana, pa funkcija $|z|$ nigdje nije derivabilna, a stoga niti holomorfna.

Komentar 1.43. Prisjetimo se, među realnim funkcijama postoje primjeri neprekidnih funkcija koje nigdje nisu derivabilne, poput primjerice Weierstraßove funkcije. Međutim, ovo su u pravilu "egzotični", pažljivo konstruirani primjeri. S druge strane, kod kompleksnih funkcija na analogne slučajeve, neprekidnih i nigdje derivabilnih funkcija, nalazimo već među elementarnim primjerima, poput $\mathrm{Re}(z)$ i $|z|$. To nam na još jedan način sugerira kako je derivabilnost kompleksnih funkcija daleko "jače" svojstvo nego li je to bila derivabilnost kod realnih funkcija. //

Postoji li kompleksna funkcija koja je derivabilna samo u jednoj točki te stoga nigdje nije holomorfna. Da, takav primjer imamo kod $f(z) = |z|^2$,

$$f'(0) = \lim_{w\to 0} \frac{|0+w|^2 - |0|^2}{w} = \lim_{w\to 0} \frac{|w|^2}{w} = \lim_{w\to 0} w^* = 0$$

S druge strane, ova funkcija ne zadovoljava C-R uvjete u niti jednoj točki kompleksne ravnine osim u $z = 0$, stoga je derivabilna samo u ishodištu.

Komentar 1.44. Odmah vidimo da su realni i imaginarni dijelovi holomorfne funkcije tzv. harmoničke funkcije,

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0\ , \quad \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u = 0$$

Ovdje uočavamo vezu s dvodimenzionalnom elektrostatikom: električni skalarni potencijal u je u vakuumu zadan diferencijalnom jednadžbom $\nabla^2 u = 0$. To znači da svaka holomorfna funkcija u svom realnom i imaginarnom dijelu sadrži rješenja dvodimenzionalnog elektrostatičkog problema. //

Komentar 1.45. Iz C-R uvjeta je moguće iščitati još jedan zaključak. Naime, promatramo li realni i imaginarni dio kompleksne varijable z kao funkcije varijabli z i z^*,

$$x = \frac{z + z^*}{2}\ , \quad y = \frac{z - z^*}{2i}\ ,$$

tada možemo pisati

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial_x u + i\partial_x v + i\partial_y u - \partial_y v}{2}$$

Ako je f holomorfna funkcija, tada iz C-R uvjeta izlazi kako je desna strana jednakosti nula, odnosno $\partial f/\partial z^* = 0$ na nekom otvorenom skupu. U obratnom slučaju, za funkciju f koja zadovoljava $\partial f/\partial z = 0$ na nekom otvorenom skupu, ponekad se koristi fraza *antiholomorfna* funkcija. //

Postoji li kompleksna funkcija koja u nekoj točki zadovoljava C-R uvjete, ali ipak tamo nije derivabilna? Da, primjer je funkcija

$$f(z) = \begin{cases} (z^*)^2/z\ , & z \neq 0 \\ 0\ , & z = 0 \end{cases}$$

u točki $z = 0$. Naime, valja uočiti kako uz supstituciju $w = c\epsilon$, gdje je $c \in \mathbb{C}^\times$ konstantan kompleksan broj, a ϵ pozitivan realan broj kojeg promatramo u limesu kada $\epsilon \to 0$, imamo

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(0+w)-0}{w} = \lim_{w\to 0} \frac{(w^*)^2}{w^2} = \frac{(c^*)^2}{c^2}$$

Ako je $c = 1$ (limes duž realne osi) ili $c = i$ (limes duž imaginarne osi), tada dobivamo konzistentan rezultat, $(c^*/c)^2 = 1$ te su stoga C-R uvjeti zadovoljeni. Međutim, za sve druge odabire konstante c dobit ćemo druge vrijednosti limesa pa promatrana funkcija stoga nije derivabilna u $z = 0$.

Ovaj primjer nam govori kako je kod obrata Cauchy-Riemannovog teorema potrebno, pored C-R uvjeta, pretpostaviti još neke dodatne uvjete na promatranu funkciju.

Teorem 1.46. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, te $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije koje su derivabilne (kao realne funkcije dvije varijable) u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$, te koje zadovoljavaju C-R uvjete u toj točki. Tada je kompleksna funkcija $f = u + iv$ derivabilna u točki $z_0 = x_0 + iy_0$.*

Dokaz : Pretpostavka o derivabilnosti funkcija u i v znači da postoje brojevi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0) - c(x-x_0) - d(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Primjetimo da su ovdje

$$a = \partial_x u(x_0,y_0)\ , \quad b = \partial_y u(x_0,y_0)\ , \quad c = \partial_x v(x_0,y_0)\ , \quad d = \partial_y v(x_0,y_0)\ ,$$

što znači da C-R uvjeti povlače da je $c = -b$ te $d = a$. Dakle,

$$\begin{gathered} f(z) - f(z_0) - (a - ib)(z - z_0) = \\ = u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0) + \\ +i\big(v(x,y) - v(x_0,y_0) - c(x-x_0) - d(y-y_0)\big) \end{gathered}$$

Stoga, dijeljenjem sa $(z - z_0)$ i puštanjem limesa $z \to z_0$ dobivamo

$$\lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a - ib) \right|^2 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\alpha(x,y) + \beta(x,y)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = 0$$

gdje smo uveli pokrate

$$\alpha(x,y) = \big(u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)\big)^2$$

$$\beta(x,y) = \big(v(x,y) - v(x_0,y_0) - c(x-x_0) - d(y-y_0)\big)^2\ .$$

□

Postoje i "snažniji" rezultati, u smislu da koriste manje pretpostavki, poput narednog teorema.

Teorem 1.47 (Looman-Menchoff). *Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, te $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da vrijedi*

(a) f je neprekidna na Ω,

(b) parcijalne derivacije u_x, u_y, v_x i v_y su definirane na cijelom $\Omega_{\mathbb{R}^2}$, te

(c) u i v zadovoljavaju C-R jednadžbe na $\Omega_{\mathbb{R}^2}$,

tada je $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

Na prvi pogled (naivno) izgleda kao da bi uvjet (b) u gore navedenom teoremu trebao povlačiti uvjet (a). Da li je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja u svim točkama domene Ω ima definirane parcijalne derivacije $\partial_x f(x,y)$ i $\partial_y f(x,y)$, nužno neprekidna? Ne! Protuprimjer, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} \,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Naime, i u jednoj potencijalno "problematičnoj" točki imamo

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(0+\epsilon,0) - f(0,0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{0}{\epsilon} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(0,0+\epsilon) - f(0,0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{0}{\epsilon} = 0$$

ali $f(t,t) = 1$ za svaki $t \neq 0$, a $f(0,0) = 0$, pa ova funkcija nije neprekidna u točki $(x,y) = (0,0)$!

Sada ćemo dokazati pomalo očekivanu vezu — analitičke funkcije su nužno holomorfne.

Teorem 1.48. *Ako red potencija $f(z) = \sum a_n z^n$ ima radijus konvergencije R, tada*

(a) red $\sum n a_n z^{n-1}$ ima isti radijus konvergencije,

(b) funkcija f je holomorfna na otvorenom disku $B(0,R)$ te vrijedi

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Drugim riječima, analitičke kompleksne funkcije su nužno i holomorfne.

Dokaz : (a) Radijus konvergencije R reda $\sum a_n z^n$ dan je prema Cauchy-Hadamardovom teoremu s

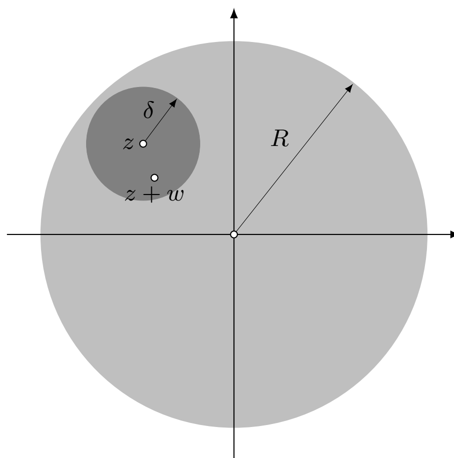
$$\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} \,.$$

Vrijedi

$$\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/n} |a_n|^{1/n}$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, nizovi $(|na_n|^{1/n})_n$ i $(|a_n|^{1/n})_n$ imaju isti limes supremum, pa redovi $\sum a_n z^n$ i $\sum na_n z^n$ imaju isti radijus konvergencije, a znamo da su redovi $\sum na_n z^{n-1}$ i $\sum na_n z^n$ apsolutno konvergentni za iste vrijednosti argumenta z, čime je dokazan prvi dio tvrdnje.

(b) Neka je $|z| < R$ i $\delta > 0$, takav da vrijedi $\overline{B(z,\delta)} \subseteq B(0,R)$. Drugim riječima, vrijedi $|z| + \delta < R$. Promotrimo kompleksan broj $w \in \overline{B(0,\delta)}$, odnosno $|w| \le \delta$.



Vrijedi

$$f(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(z^n + nwz^{n-1} + w^2 P_{n-2}(z,w)\big)$$

gdje je $P_{n-2}(z,w)$ polinom

$$P_{n-2}(z,w) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} w^{k-2} z^{n-k}\,, \quad P_{-2}(z,w) = P_{-1}(z,w) \equiv 0$$

Koristeći $|w| \le \delta$ i nejednakost trokuta imamo

$$|P_{n-2}(z,w)| \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta^{k-2} |z|^{n-k} = P_{n-2}(|z|,\delta)$$

Nadalje, za svaki $N \in \mathbb{N}$ imamo parcijalne sume

$$\sum_{n=0}^{N} a_n (z+w)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=1}^{N} nwa_n z^{n-1} = w^2 \sum_{n=2}^{N} a_n P_{n-2}(z,w)$$

S obzirom da su s lijeve strane konvergentne parcijalne sume, isto vrijedi i za sumu s desne strane pa možemo pisati

$$f(z+w) - f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} nwa_n z^{n-1} = w^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_{n-2}(z,w) \qquad (*)$$

Nadalje, na lijevoj strani jednakosti imamo tri apsolutno konvergentna reda (jer su $z, z+w \in B(0,R)$, a za red $\sum n a_n z^{n-1}$ smo u prvom dijelu teorema dokazali da ima isti radijus konvergencije) pa je i desna strana apsolutno konvergentan red. Stoga, prema ranije dokazanoj lemi, vrijedi

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_{n-2}(z,w) \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |P_{n-2}(z,w)| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| P_{n-2}(|z|,\delta)$$

Dijeljenjem obje strane jednakosti $(*)$ s $w \ne 0$ dobivamo

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = w \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_{n-2}(z,w) \ .$$

Kako je

$$\left| w \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_{n-2}(z,w) \right| \le |w| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| P_{n-2}(|z|,\delta) \ ,$$

pri limesu $w \to 0$ desna strana ide u nulu, a onda i lijeva,

$$\lim_{w \to 0} \left| w \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_{n-2}(z,w) \right| = 0$$

Time smo dokazali da je funkcija f derivabilna (i stoga holomorfna) na otvorenom skupu $B(0,R)$, te je njena derivacija dana deriviranjem "član po član" u sumi. □

Odavde vidimo da je

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \dots$$

i općenito

$$f^{(k)}(z) = k!\, a_k + g_k(z) \ ,$$

gdje je $g_k(z)$ red potencija bez konstantnog člana. Imamo, dakle

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \ , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \tag{1.57}$$

i općenito, za razvoj oko točke z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \tag{1.58}$$

Time smo izveli kompleksnu verziju **Taylorovog razvoja**.

§ 1.8 Integracija kompleksnih funkcija

Definicija 1.49. Neka je $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}_0$ ili $k = \infty$. Za preslikavanje $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ kažemo da je **po dijelovima** klase C^k ako je klase C^k u svim osim u *konačno* mnogo točaka intervala $[a,b]$.

Definicija 1.50. Neka je $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. **Put** je neprekidno preslikavanje $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ kojem su realni i imaginarni dijelovi po dijelovima klase C^1. Varijablu funkcije γ zovemo *parametar puta*. Slika ovog preslikavanja, $\gamma([a,b])$, je ***krivulja*** u kompleksnoj ravnini. Za put γ kažemo da je **zatvoren put** ako vrijedi $\gamma(a) = \gamma(b)$.

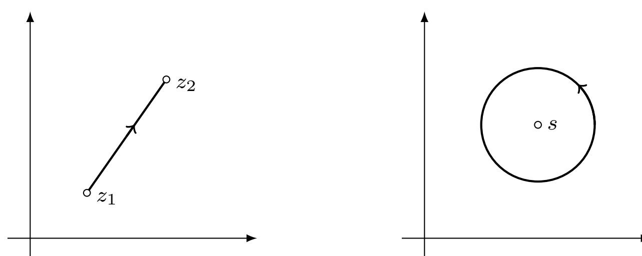
Definicija 1.51. **Jordanova** ili **jednostavna zatvorena krivulja** je slika neprekidne injekcije $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$, odnosno $\gamma : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{C}$.

Komentar 1.52. Ponekad ćemo "zloupotrebljavati" istu oznaku za put (preslikavanje) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ i krivulju (sliku tog preslikavanja) $\gamma([a,b])$. //

Primjeri:

$$\gamma(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t\,, \quad t \in [0,1]$$

$$\gamma(t) = s + Re^{it}\,, \quad t \in [0,2\pi]$$



Definicija 1.53. Neka je $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ i $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, te $F(t) = u(t) + iv(t)$. Tada definiramo integral

$$\int F(t)\,\mathrm{d}t \equiv \int u(t)\,\mathrm{d}t + i\int v(t)\,\mathrm{d}t$$

Definicija 1.54. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $\gamma : [a,b] \to \Omega$ put koji je klase C^1 na cijelom intervalu $[a,b]$. Integral neprekidne kompleksne funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je definiran narednim izrazom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \equiv \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.59}$$

gdje je

$$\gamma'(t) = (\mathrm{Re}(\gamma(t)))' + i(\mathrm{Im}(\gamma(t)))'$$

Općenitije, ako je $\gamma : [a,b] \to \Omega$ put koji je klase C^1 na konačno mnogo podintervala $[t_j, t_{j+1}] \subseteq [a,b]$, tada definiramo integral

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \equiv \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.60}$$

Komentar 1.55. Ovdje na elegantan način izbjegavamo ponovno uvođenje integrala preko "gornjih" i "donjih" suma, jer je to već skriveno u definicji realnih integrala. Umjesto toga formalnom supstitucijom $z = \gamma(t)$, odnosno $\mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ motiviramo svođenje integracije kompleksne funkcije po putu u kompleksnoj ravnini na integraciju kompleksne funkcije po realnom intervalu, prirodno rastavljene na dva realna integrala prema gornjoj definiciji. //

Teorem 1.56. *Definicija integracije je neovisna o reparametrizaciji puta po kojem se integrira.*

Dokaz : Neka je $s : [a,b] \to [c,d]$ funkcija klase C^1, takva da je $s(a) = c$ i $s(b) = d$, te $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ put klase C^1 na cijelom intervalu $[c,d]$. Tada je $\gamma(t) = \psi(s(t))$ put, po kojem integracija glasi

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\psi(s(t)))\psi'(s(t))s'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_c^d f(\psi(s))\psi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_\psi f(z)\,\mathrm{d}z$$

□

Komentar 1.57. Kada imamo integraciju po zatvorenom putu, tada obično koristimo posebnu oznaku (integral s "kružićem") kako bismo to dodatno naglasili,

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

//

Ponekad ćemo koristiti posebnu oznaku za put koji ide u "obratnom smjeru", $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$(-\gamma)(t) \equiv \gamma(a+b-t)$$

Lako se provjeri da integracija po putu $-\gamma$ samo mijenja predznak rezultata,

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f((-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\,\frac{d\gamma(a+b-t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

Upotrebom supstitucije $s = a+b-t$ imamo

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(a+b-t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d\gamma(s)}{\mathrm{d}s}\,\frac{ds}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\gamma(s)}{\mathrm{d}s}$$

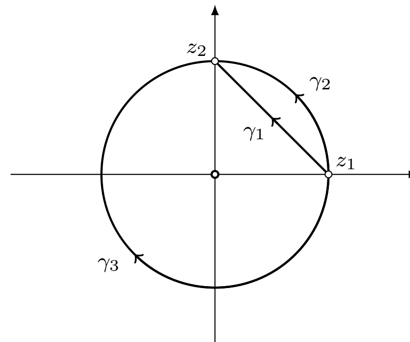
$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_b^a f(\gamma(s))(-1\cdot\gamma'(s))(-\mathrm{d}s) =$$

$$= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ono što je nespretno kod ovakve oznake jest moguća zamjena funkcije $-\gamma$ s funkcijom γ pomnoženom s brojem -1, što smo gore pokušali izbjeći dodatnom upotrebom zagrada. Nije se teško domisliti alternativnim i vjerojatno manje zbunjujućim oznakama, poput γ_-, ali takve nažalost općenito nisu u upotrebi kroz literaturu.

Promotrimo jednostavan primjer integracije po tri različita puta s istom početnom ($z_1 = 1$) i završnom točkom ($z_2 = i$),

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$$



- put γ_1

$$\gamma_1(t) = 1 - t + it = 1 + (-1+i)t\,, \quad t \in [0,1]\,, \quad \gamma_1'(t) = -1 + i$$

$$f(\gamma_1(t)) = \frac{1}{(1-t)+it} = \frac{(1-t)-it}{(1-t)^2+t^2} = \frac{1-t}{2t^2-2t+1} - \frac{t}{2t^2-2t+1}\, i$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \frac{(-1+i)\big((1-t)-it\big)}{2t^2-2t+1}\, \mathrm{d}t$$

Tablični integrali za $P(x) = ax^2 + bx + c$, uz pokratu $\Delta = 4ac - b^2 > 0$,

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{P(x)} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + C$$

$$I_2 = \int \frac{x\, \mathrm{d}x}{P(x)} = \frac{1}{2a}\big(\ln(P(x)) - bI_1\big) + C$$

Mi imamo

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-2t+1} = \operatorname{arctg}(2t-1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{t\, \mathrm{d}t}{2t^2-2t+1} = \frac{1}{4}\left(\ln(2t^2-2t+1)\Big|_0^1 + 2\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = (-1+i)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi i}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}$$

- put γ_2

$$\gamma_2(t) = e^{it}\,, \quad t \in [0, \pi/2]\,, \quad \gamma_2'(t) = ie^{it}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{\pi/2} \frac{ie^{it}\, \mathrm{d}t}{e^{it}} = i \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi i}{2}$$

Rezultat se slaže s integracijom po putu γ_1!

- put γ_3

$$\gamma_3(t) = e^{i\left(\frac{5\pi}{2} - t\right)} = ie^{-it}\,, \quad t \in [\pi/2, 2\pi]\,, \quad \gamma_3'(t) = e^{-it}$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{e^{-it}\, \mathrm{d}t}{ie^{-it}} = -i \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \mathrm{d}t = -\frac{3\pi i}{2}$$

Rezultat se *ne slaže* s integracijom po putevima γ_1 i γ_2! Zašto? Prvo primjetimo da podintegralna funkcija f divergira u točki $z_0 = 0$. Nadalje, putevi γ_1 i γ_2 omeđuju skup u kompleksnoj ravnini koji *ne sadrži* točku z_0, dok skupovi koje omeđuju γ_1 i γ_3, odnosno γ_2 i γ_3 sadrže točku z_0. Ovaj fenomen ćemo sada detaljnije proučiti. Prvo ćemo dokazati nekoliko pomoćnih rezultata.

Lema 1.58. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $\gamma : [a,b] \to \Omega \subseteq \mathbb{C}$ po dijelovima C^1 put, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z \right| \le \ell(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)| \tag{1.61}$$

gdje je $\ell(\gamma)$ duljina krivulje γ.

DOKAZ : Pretpostavimo prvo da je put γ klase C^1 na cijelom intervalu $[a,b]$. Uvedimo pokratu

$$w \equiv \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ako je $w = 0$ tada tvrdnja trivijalno vrijedi, pa pretpostavimo $w \neq 0$. Tada vrijedi

$$|w|^2 = w^* \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{Re}\left(w^* \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \mathrm{Re}\left(\int_\gamma w^* f(z)\,\mathrm{d}z\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_a^b w^* f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(w^* f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \int_a^b \left|w^* f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t = |w| \int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

Dijeljenjem s $|w|$ dobivamo

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq \left(\max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\right) \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

U zadnjem koraku smo iskoristili činjenicu da je interval $[a,b]$ kompaktan podskup realnih brojeva, pa negdje na njemu neprekidna funkcija $|f(\gamma(t))|$ nužno poprima maksimalnu vrijednost. Valja napomenuti kako izraz za maksimalnu vrijednost mogli napisati i u nešto drugačijem obliku,

$$\max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| = \max_{z\in\gamma} |f(z)|$$

pri čemu zaključak o postojanju takve maksimalne vrijednosti ostaje nepromjenjen jer je slika puta $\gamma([a,b])$ opet kompaktan skup (u kompleksnoj ravnini). Primjetimo sada da je duljina krivulje γ dana izrazom

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}\ell = \int_\gamma \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

Kako su $\mathrm{d}x(t) = x'(t)\,\mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}y(t) = y'(t)\,\mathrm{d}t$, imamo

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

odakle slijedi tvrdnja. Rezultat se jednostavno poopći za put koji je po dijelovima klase C^1, razlamanjem integrala u "regularne" dijelove puta

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\sum_j \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \sum_j \left|\int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq$$

$$\leq \sum_j \ell(\gamma_j)\cdot \max_{z\in\gamma_j} |f(z)| \leq \left(\sum_j \ell(\gamma_j)\right) \max_{z\in\gamma} |f(z)| = \ell(\gamma)\cdot \max_{z\in\gamma} |f(z)|$$

□

Teorem 1.59. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, te neka je $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ primitivna funkcija funkcije f, odnosno $F'(z) = f(z)$. Ako su $p, q \in \Omega$ i $\gamma : [a,b] \to \Omega$ po dijelovima C^1 put, takav da je $\gamma(a) = p$ i $\gamma(b) = q$, tada vrijedi*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(q) - F(p) \tag{1.62}$$

Specijalno, ako je $p = q$, tada je γ zatvoren put i vrijedi

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

DOKAZ : Pretpostavimo prvo da je γ put klase C^1 na cijelom intervalu $[a, b]$. Koristeći pretpostavke iz teorema imamo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(q) - F(p)$$

Općenito, ako je γ put klase C^1 na podintervalima

$$[t_0 = a, t_1]\,,\ [t_1, t_2]\,,\ \ldots\,,\ [t_{N-1}, t_N = b]$$

za neki $N \in \mathbb{N}$, tada korištenjem prethodnog zaključka i rastavom integracije na dijelove, možemo jednostavno možemo poopćiti rezultat,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{N-1} F(\gamma(t_{j+1})) - F(\gamma(t_j)) = F(q) - F(p)$$

□

Komentar 1.60. Primjetimo da prethodni teorem tvrdi kako je integral ne ovisi o putu sve dok on prolazi kroz skup Ω i ima neizmjenjene početnu i završnu točku. //

Uzmimo na primjer funkcije $f_n(z) = z^n$ za $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$. Njihove primitivne funkcije su $F_n(z) = z^{n+1}/(n+1)$. Tada za zatvoren put γ (koji za $n < 0$ ne prolazi kroz ishodište kompleksne ravnine) vrijedi

$$\oint_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = 0 \tag{1.63}$$

Lema 1.61. *Udaljenost između svakog para točaka unutar nekog trokuta u ravnini manja je od polovice opsega tog trokuta.*

DOKAZ : Neka je zadan trokut T s duljinama stranica a, b i c. Koristeći nejednakost trokuta,

$$a < b + c$$

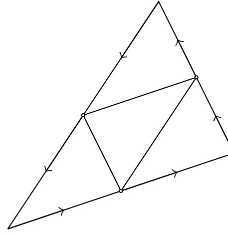
dodavanjem a na obje strane nejednakosti, $2a < o$, odmah vidimo kako je *svaka* stranica trokuta manja od polovice njegovog opsega, $a < o/2$. Nadalje, neka su $P, Q \in T$ proizvoljan par točaka u trokutu, a P' i Q' točke u kojima pravac PQ presjeca obod trokuta T. Odmah vidimo kako je $|PQ| < |P'Q'|$, stoga je dovoljno razmatrati parove točaka na obodu trokuta. Konačno, tvrdnja slijedi jer je udaljenost svakog para točaka na obodu trokuta manja ili jednaka od duljine najveće stranice trokuta. □

Lema 1.62 (Goursat). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $T \subseteq \Omega$ trokut i $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Tada za rub trokuta $C = \partial T$ vrijedi*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Komentar 1.63. U hrvatskom jeziku nažalost nemamo različite riječi koje bi razlikovale trokut (dvodimenzionalni dio ravnine) i njegov rub. L. Tiška je, po uzoru na krug i kružnicu, predložio naziv "trokutnica" za *rub* trokuta. //

DOKAZ :



Ako spajanjem polovišta stranica početni trokut rastavimo na 4 manja trokuta s pozitivno orijentiranim rubovima, tada vrijedi

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{4} \oint_{\partial\triangle_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

jer se integracije duž stranica unutrašnjeg trokuta pokrate.

$$\left|\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\sum_{i=1}^{4} \oint_{\partial\triangle_i} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sum_{i=1}^{4} \left|\oint_{\partial\triangle_i} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 4\left|\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$$

gdje je C_1 rub jednog od 4 trokuta koji daje najveći doprinos u integraciji. Iterativnim ponavljanjem dobivamo

$$\left|\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 4^n \left|\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$$

Označimo s T_n trokut čiji je rub C_n. Tvrdimo da je presjek svih trokuta T_n neprazan i sastoji se od točno jedne točke, $z_0 \in T$. Neka je w_n neka točka unutar trokuta T_n (na primjer, središte upisane kružnice). Tada je (w_n) Cauchyjev niz točaka u kompleksnoj ravnini, pa je nužno i konvergentan. Točka $z_0 \equiv \lim w_n$ je sadržana u trokutu T, kao i u svakom trokutu T_n (ovo su zatvoreni skupovi pa sadrže gomilišta svojih nizova). Konačno, ako bi postojala još jedna točka z_1 sadržana u presjeku svih trokuta, tada imamo kontradikciju jer postoje trokuti po volji manji od duljine $|z_0 - z_1|$.

Nadalje, po pretpostavci je f holomorna funkcija u svim točkama unutar početnog trokuta T, pa tako i u z_0. Stoga postoji $r > 0$, takav da za sve $z \in B(z_0, r)$ vrijedi

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$$

gdje je

$$\lim_{z\to z_0} \eta(z) = 0$$

Za dovoljno velik n trokut C_n je sadržan unutar otvorenog diska $B(z_0, r)$, pa vrijedi

$$\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \big(f(z_0) - z_0 f'(z_0)\big) \oint_{C_n} 1\,\mathrm{d}z + f'(z_0) \oint_{C_n} z\,\mathrm{d}z + \oint_{C_n} \eta(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z$$

Ranije izvedena formula (1.63) nam kaže da dva prva člana iščezavaju. Nadalje,

$$\left|\oint_{C_n} \eta(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z\right| \le L_n \cdot \max_{z\in C_n} |\eta(z)(z - z_0)|$$

gdje je L_n opseg n-tog trokuta. Vrijedi $L_n = 2^{-n}L$, gdje je L opseg početnog trokuta, te $|z - z_0| < L_n/2$ za sve $z \in C_n$. Nadalje, za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da $|z - z_0| < \delta$ povlači $|\eta(z)| < 2\epsilon/L^2$. Uvijek možemo odabrati dovoljno velik n, takav da trokut C_n leži unutar otvorenog kruga $B(z_0, \delta)$. Dakle,

$$\left| \oint_{C_n} \eta(z)(z - z_0)\, \mathrm{d}z \right| < \frac{L}{2^n} \frac{2\epsilon}{L^2} \frac{L}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{4^n}$$

te

$$\left| \oint_C f(z)\, \mathrm{d}z \right| < \epsilon$$

□

Teorem 1.64 (o postojanju primitivne funkcije). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren konveksan skup i $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Nadalje, neka je $z_0 \in \Omega$. Tada je za svaki $z \in \Omega$ funkcija*

$$F(z) \equiv \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

primitivna funkcija funkcije f, odnosno vrijedi $F'(z) = f(z)$.

Dokaz : Promotrimo proizvoljnu točku $z_1 \in \Omega$. Koristeći Goursatovu lemu znamo da vrijedi

$$F(z) - F(z_1) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta - \int_{[z_0, z_1]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \int_{[z_1, z]} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\ ,$$

Imamo stoga,

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| = \left| \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} \big(f(\zeta) - f(z_1)\big)\, \mathrm{d}\zeta \right| \le$$

$$\le \frac{1}{|z - z_1|}\, \ell([z_1, z]) \cdot \max_{\zeta \in [z_1, z]} |f(\zeta) - f(z_1)| = \max_{\zeta \in [z_1, z]} |f(\zeta) - f(z_1)|$$

Kako je f neprekidna funkcija u točki z_1, slijedi da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za sve $z \in B(z_1, \delta)$ vrijedi $|f(z) - f(z_1)| < \epsilon$, a stoga i

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \le \max_{\zeta \in [z_1, z]} |f(\zeta) - f(z_1)| < \epsilon$$

Time smo dokazali da je $F'(z_1) = f(z_1)$. □

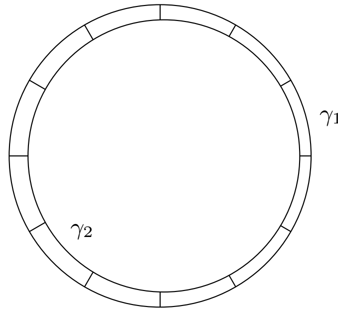
Teorem 1.65 (Cauchy-Goursat). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren jednostavno povezan skup i $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Nadalje, neka je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ zatvoren, po dijelovima C^1 put u Ω. Tada je*

$$\oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0 \tag{1.64}$$

Dokaz : (Skica) Ako je Ω konveksan skup, tada prema prethodnoj Lemi znamo da postoji primitivna funkcija F, a onda iz Leme 1.59 slijedi tvrdnja teorema. Poopćenje za jednostavno povezane skupove se napravi promatranjem neprekidne deformacije integracijskog puta u točku (ovdje samo iznosimo ideju dokaza i nećemo prolaziti kroz sve tehničke detalje),

$$0 = \sum_k \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$



Za tehničke detalje vidi Barreira, Vallis: "Complex Analysis and Differential Equations", poglavlje 2.8 □

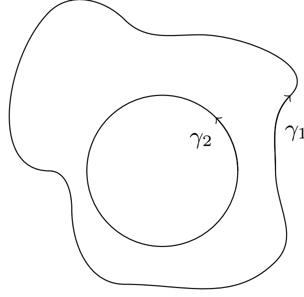
Ako skup na kojem je funkcija holomorfna (i kroz koji prolazi integracijski put) nije jednostavno povezan, tada nema garancije da će Cauchy-Goursatov teorem vrijediti i lako se možemo uvjeriti kako je to uistinu točno. Neka je $c \in \mathbb{C}$. Promotrimo funkciju $f(z) = 1/(z-c)$ koja je holomorfna u svim točkama kompleksne ravnine osim u c. Neka je C_R pozitivno orijentirana kružnica radijusa R sa središtem u točki c, odnosno

$$C_R(t) = c + Re^{it}\ , \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}\,\mathrm{d}t}{Re^{it}} = 2\pi i \qquad (1.65)$$

Kao što vidimo, rezultat nije nula!

Pa ipak, upotrebom dokaza koji je korišten u Cauchy-Goursatovom teoremu vidimo da se neprekidnim deformiranjem integracijske krivulje kroz skup na kojem je podintegralna funkcija holomorfna (neovisno o tome da li taj skup jest ili nije jednostavno povezan) vrijednost integrala neće promjeniti. Taj postupak ćemo često koristiti kada želimo početni put deformirati u neki na kojem je jednostavnije obaviti integraciju.



Konkretno, koristeći defomaciju pozitivno orijentiranog puta γ (koji omeđuje skup u kojem se nalazi točka $c \in \mathbb{C}$) u kružnicu sa središtem u točki c i ranije rezultate, možemo ustvrditi da je za svaki $n \in \mathbb{Z}$

$$\oint_\gamma (z-c)^n \, \mathrm{d}z = 2\pi i \, \delta_{n,-1} \tag{1.66}$$

Teorem 1.66 (Cauchyjeva integralna formula). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren jednostavno povezan skup, funkcija $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, a $\gamma : [a,b] \to \Omega$ zatvoren, pozitivno orijentiran, po dijelovima C^1 put čija je slika Jordanova krivulja koja omeđuje otvoren neprazan skup $O \subseteq \Omega$. Tada za svaki $z \in O$ vrijedi*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \tag{1.67}$$

Dokaz : Podintegralna funkcija $f(\zeta)/(\zeta - z)$ je holomorfna u svim točkama skupa Ω osim u z. Prvo ćemo deformirati krivulju γ u kružnicu C_R radijusa R sa središtem u točki z,

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

Koristeći rezultat (1.65) i Lemu 1.58 imamo

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \, \ell(C_R) \max_{\zeta \in C_R} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} = \frac{1}{2\pi} \, 2\pi R \, \frac{1}{R} \max_{\zeta \in C_R} |f(\zeta) - f(z)| = \max_{\zeta \in C_R} |f(\zeta) - f(z)|$$

Konačno, funkcija f je holomorfna, a stoga i neprekidna u točki z, pa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za sve $\zeta \in B(z,\delta)$ vrijedi $f(\zeta) \in B(f(z),\epsilon)$, odnosno $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$. Kako za svaki $\delta > 0$ možemo odabrati dovoljno mali radijus $R > 0$, takav da je $C_R \subseteq B(z,\delta)$, slijedi tvrdnja teorema. □

Komentar 1.67. Primjetimo kako je holomorfna funkcija f na skupu Ω iz prethodnog teorema jedinstveno definirana svojim vrijednostima na rubu tog skupa! //

Sada dolazimo do jednog od ključnih rezultata u kompleksnoj analizi. Ranije smo ustvrdili pomalo očekivan rezultat: analitičke kompleksne funkcije su nužno i holomorfne. Međutim, iznenađenje jest da vrijedi i obrat.

Lema 1.68. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i $(f_n)_n$ niz neprekidnih kompleksnih funkcija $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ koji konvergira uniformno k funkciji $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Tada za svaki po dijelovima C^1 put $\gamma : [a, b] \to \Omega$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Nadalje, ako red $\sum f_n$ konvergira uniformno, tada vrijedi

$$\int_\gamma \sum f_n = \sum \int_\gamma f_n$$

DOKAZ : Prvi dio tvrdnje odmah slijedi iz nejednakosti

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,\mathrm{d}z\right| \le \ell(\gamma) \max_{z\in\gamma} |f_n(z) - f(z)|$$

Drugi dio tvrdnje slijedi jer je uniformna konvergencija reda definirana s obzirom na parcijalne sume,

$$s_m(z) = \sum_{n=1}^{m} f_n(z)$$

pa koristeći prvi dio leme imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{m\to\infty} \int_\gamma s_m(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_\gamma \Big(\lim_{m\to\infty} s_m(z)\Big)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z$$

□

Teorem 1.69 (Holomorfne funkcije su analitičke). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, te $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Tada je f i analitička funkcija na skupu Ω.*

DOKAZ : Neka je $z_0 \in \Omega$. Kako je Ω otvoren skup, tada postoji realan broj $R > 0$, takav da je $B(z_0, R) \subseteq \Omega$. Nadalje, neka je $r < R$ pozitivan realan broj i $C_r \subseteq \Omega$ kružnica koja je slika puta

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \Omega\,, \quad \gamma_r(t) = z_0 + re^{it}\,.$$

Tada je po Cauchyjevoj integralnoj formuli (primjetimo, otvoren krug $B(z_0, r)$ je jednostavno povezan skup)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

za svaki $z \in B(z_0, r)$. Kako je $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, imamo razvoj u red

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

Promatran kao funkcija varijable ζ, ovaj red uniformno konvergira na skupu koji sadrži i kružnicu C_r, u što se možemo uvjeriti sljedećim postupkom. Odaberimo realne brojeve $s, t > 0$, takve da je

$$|z - z_0| \le t < s < r$$

i gornje međe $M_n = (t/s)^n$. Tada je red $\sum_n M_n$ konvergentan i vrijedi

$$\left| \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right| \le M_n \ ,$$

za sve vrijednosti varijable ζ na vijencu $s \le |\zeta - z_0| \le R$ pa po Weierstraßovom M-testu imamo uniformnu konvergentnost promatranog reda. Stoga, koristeći prethodnu lemu, ovaj red možemo integrirati "član po član",

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n$$

Time smo dobili razvoj funkcije f u red potencija oko proizvoljne točke $z_0 \in \Omega$, koji konvergira unutar radijusa r (ovo naravno vrijedi za svaki $r < R$). Drugim riječima, f je nužno i analitička funkcija na skupu Ω. □

U dokazu ovog teorema smo dobili i ekplicitan izraz za koeficijente u razvoju funkcije f u red potencija,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \ . \tag{1.68}$$

Valja naglasiti kako vrijednost ovih koeficijenata ne ovisi o radijusu r integracijske kružnice, sve dok su kružnica C_r, kao i otvoreni krug $B(z_0, r)$ kojeg ona obuhvaća, unutar skupa Ω na kojem je funkcija f holomorfna. Nadalje, kako smo ranije za Taylorov red kompleksnih funkcija dokazali da je $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, ujedno imamo i izraz za derivacije funkcije f

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \tag{1.69}$$

Teorem 1.70 (Liouville). *Ako je $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, te ako je $|f(z)|$ omeđena na $\mathbb{C}$, tada je $f(z) = \mathrm{konst.}$*

Dokaz : Neka je M gornja međa funkcije f i $z_0 \in \mathbb{C}$. Koristeći formulu 1.69 imamo

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, \mathrm{d}\zeta \right| \le \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{1}{R^2} \max_{t \in [0, 2\pi]} \left| f(z_0 + Re^{it}) \right| \le \frac{M}{R}$$

Za svaki $\epsilon > 0$ možemo odabrati dovoljno velik R, tako da je $M/R < \epsilon$. Drugim riječima, $f'(z_0) = 0$ za svaki $z_0 \in \mathbb{C}$. Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dva proizvoljna različita kompleksna broja. Tada vrijedi

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} f'(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

čime je dokazana tvrdnja.

Alternativni dokaz pomoću Cauchyjeve integralne formule,

$$f(z_2) - f(z_1) = \oint_\gamma \left(\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right) f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \oint_\gamma \frac{(z_2 - z_1) f(\zeta)}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)}\, \mathrm{d}\zeta$$

Odabirom kružnice radijusa $R > 2|z_2 - z_1|$ za integracijsku krivulju, $\gamma(t) = z_1 + Re^{it}$, imamo

$$|\zeta - z_2| = |(\zeta - z_1) + (z_1 - z_2)| \geq |\zeta - z_1| - |z_2 - z_1| > \frac{R}{2}$$

$$\big|f(z_2) - f(z_1)\big| \leq 2\pi R\, \frac{|z_2 - z_1|M}{\frac{1}{2}R^2} = 4\pi |z_2 - z_1|\, \frac{M}{R}$$

Opet, za svaki $\epsilon > 0$ možemo odabrati dovoljno velik R, tako da je desna strana strogo manja od ϵ, odakle slijedi tvrdnja. □

Komentar 1.71. Do sada smo se sreli s periodičnim holomorfnim funkcijama, npr. $\exp(z+n2\pi i) = \exp(z)$ za svaki $z \in \mathbb{C}$ i svaki $n \in \mathbb{Z}$. Možemo se pitati postoji li holomorfna funkcija f s dvostrukom periodičnošću, ona za koju bi postojali $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^\times$, takvi da je $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ te $f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z)$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Za početak vidimo kako je na "osnovnom paralelogramu" (s rubom) razapetom kompleksnim brojevima ω_1 i ω_2 funkcija $|f|$ omeđena jer je neprekidna a paralelogram s rubom je kompaktan podskup od $\mathbb{C}$. No, tada je $|f|$ (zbog periodičnosti) omeđena na cijelom $\mathbb{C}$, pa je po Liouvilleu f nužno konstantna funkcija! //

Liouvilleov teorem nam govori kako je cijela funkcija nužno neomeđena. Među-tim, postoje i jače tvrdnje koje nam otkrivaju još detalja o prirodi holomorfnih fukcija.

Teorem 1.72 (Picard). *Ako je $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ i f nije konstantna funkcija, tada je $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ili $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{z_0\}$ za neki $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Komentar 1.73. Izuzimanje točke se pojavljuje na primjer kod cijele funkcije e^z koja nema nul-točke. //

Teorem 1.74 (Osnovni teorem algebre). *Jedini polinom nad poljem kompleksnih brojeva bez nul-točke je konstantna funkcija različita od nule.*

Dokaz : Polinom nad poljem kompleksnih brojeva je funkcija $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z^1 + \cdots + a_n z^n$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, a koeficijenti $a_i \in \mathbb{C}$, takvi da vodeći ne iščezava, $a_n \neq 0$. Pretpostavimo da polinom P_n nije konstanta, te neka je $P_n(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Tada je funkcija $f(z) = 1/P_n(z)$ definirana i holomorfna za sve $z \in \mathbb{C}$ (naime, $f'(z) = -P_n'(z)/(P_n(z))^2$). S druge strane, ako pišemo

$$P_n(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_n}{z^n}\right) \;, \quad b_k = \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

vidimo da $|P_n(z)|$ poprima proizvoljno velike vrijednosti za dovoljno veliku vrijednost $|z|$ jer

$$\left|1 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_n}{z^n}\right| \leq 1 + \frac{|b_1|}{|z|} + \cdots + \frac{|b_n|}{|z|^n} \to 1$$

Stoga $|f(z)| \to 0$ kada $|z| \to \infty$. To znači da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $R > 0$, takav da je $|f(z)| < \epsilon$ za sve $|z| > R$. Zatvoren disk $\overline{B(0,R)}$ je kompaktan skup, pa je na njemu funkcija $|f(z)|$ omeđena. Sve skupa, to znači da je f omeđena cijela funkcija, pa po Liouvilleovom teoremu mora biti konstanta, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. □

§ 1.9 Laurentov razvoj

Vidjeli smo kako su kompleksne funkcije koje su holomorfne na disku imaju Taylorov razvoj. Međutim, što ako je promatrana funkcija ima "problematične" točke zbog kojih je holomorfna samo na kružnom vijencu?

Teorem 1.75 (Laurentov razvoj). *Neka je $f \in \mathscr{H}(S)$, gdje je S prsten*

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\} \ , \quad c \in \mathbb{C}$$

za neke nenegativne realne brojeve $R_2 > R_1 \geq 0$. Tada za svaki $z \in S$ vrijedi

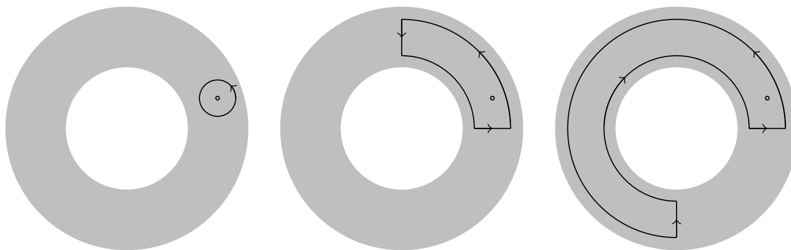
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n \ .$$

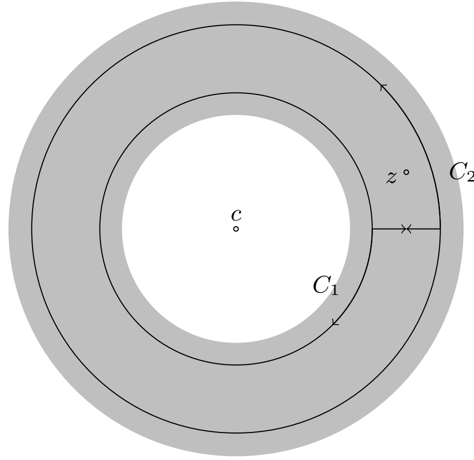
Koeficijenti a_n su jedinstveni i zadani integralima

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \ ,$$

gdje je C_R kružnica $|\zeta - c| = R$ za neki $R \in \langle R_1, R_2 \rangle$. Ovaj red konvergira apsolutno na S i uniformno na svakom kompaktnom podskupu prstena S.

Dokaz : Prvo upotrijebimo Cauchyjevu formulu za integracijsku krivulju koja je neka mala kružnica oko promatrane točke $z \in S$, a zatim deformiramo tu krivulju kroz holomorfno područje (prsten S) kako je skicirano na crtežima ispod, pri čemu se vrijednost integrala neće promjeniti.





$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \oint_{-C_1} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \right)$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{1}{\zeta - c} \frac{1}{1 - \frac{z-c}{\zeta - c}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{1}{z - c} \frac{-1}{1 - \frac{\zeta-c}{z - c}} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta-c)^m}{(z - c)^{m+1}}$$

Ovo su uniformno konvergentni redovi, pa integral i suma mogu zamjeniti mjesta,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(z-c)^{m+1}} \oint_{-C_1} f(\zeta)(\zeta - c)^m \,\mathrm{d}\zeta \right)$$

Kod druge sume možemo promjeniti indeks po kojem se sumira, $m = -(n+1)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-c)^n \oint_{-C_1} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}} \right)$$

Deformiranjem u kružnicu C_R (to možemo jer su podintegralne funkcije holomorfne na skupu unutar kojeg deformiramo krivulje C_1 i C_2),

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-c)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}}$$

što je traženi oblik razvoja. Jedinstvenost razvoja,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-c)^n$$

Množenjem obje strane s $(z-c)^{-k-1}$ za proizvoljni $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^{n-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-c)^{n-k-1}$$

Oba reda konvergiraju uniformno za $R_1 + \epsilon \le |z - c| \le R_2 - \epsilon$. Integriramo li sada obje strane po zatvorenom putu čija je slika unutar ovakvog zatvorenog prstena, te zamjenimo sumu i integral (što opet možemo radi uniformne konvergencije reda), dobivamo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_\gamma (z-c)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \oint_\gamma (z-c)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{n-k-1,-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \delta_{n-k-1,-1}$$

odnosno

$$a_k = b_k$$

□

Dio Laurentovog reda uz negativne potencije zovemo **glavni dio**, a dio uz nenegativne potencije **regularni dio**. Taylorov red je, dakle, samo specijalan slučaj Laurentovog reda koji ima samo regularni dio, a što je slučaj onda kada je funkcija holomorfna na otvorenom krugu ($R_1 = 0$).

Sada nas zanima jedinstvenost proširenja zadane funkcije s nekom holomorfnom funkcijom. Primjer: analitičko proširenje funkcije $f(z) = 1+z+z^2+\ldots$ s domenom $B(0,1)$ na funkciju $g(z) = 1/(1-z)$ s domenom $\mathbb{C} - \{1\}$.

Teorem 1.76 (o nul-točkama holomorfne funkcije). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan povezan otvoren skup i $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Ako skup nul-točaka*

$$N = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$$

ima gomilište u Ω, tada je $f(z) = 0$ za svaki $z \in \Omega$. Drugim riječima, nul-točke netrivijalne holomorfne funkcije su izolirane.

Dokaz : Ako je $N = \emptyset$, onda smo gotovi s dokazom, pa pretpostavimo suprotno. Neka je $z_0 \in N$. Funkcija f je analitička na nekom otvorenom krugu $B(z_0, R) \subseteq \Omega$, gdje ima Taylorov razvoj oblika

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Odmah vidimo da je, $a_0 = f(z_0) = 0$. Pretpostavimo prvo da postoji barem jedan koeficijent u razvoju različit od nula i neka je $k \in \mathbb{N}$ najmanji takav da je $a_k \neq 0$. Tada možemo pisati

$$f(z) = (z-z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z-z_0)^m \equiv (z-z_0)^k g(z)$$

Očigledno, g je analitička funkcija na krugu $B(z_0, R)$, te $g(z_0) = a_k \neq 0$. S obzirom da je g i neprekidna funkcija, za $\epsilon = |a_k|/2$ postoji $\delta > 0$, takav da za sve $z \in B(z_0, \delta)$ vrijedi

$$|g(z) - a_k| < \frac{|a_k|}{2}$$

Ovo povlači da je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in B(z_0, \delta)$, odnosno $f(z) \neq 0$ za sve $z \in B(z_0, \delta) - \{z_0\}$, pa je z_0 izolirana nul-točka funkcije f. S druge strane, ako bi svi koeficijenti u Taylorovom razvoju bili nula, tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in B(z_0, R)$.

Svaka nul-točka funkcije f je stoga ili izolirana ili okružena s otvorenim krugom nul-točaka. Promotrimo skup $Q \subseteq \Omega$ nul-točaka drugog tipa. Iz definicije odmah slijedi da je Q otvoren skup. Nadalje, skup $\partial Q \cap \Omega$ je prazan: funkcija f neprekidna, pa su sve točke u rubu skupa Q opet nul-točke koje nisu izolirane, što znači da moraju biti okružene s otvorenim krugom nul-točaka, a to je u kontradikciji s definicijom rubnih točaka. Dakle, skup Ω možemo napisati kao uniju dva otvorena disjunktna skupa, Q i $\Omega - \overline{Q}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je Ω povezan skup.

To znači da vrijedi ili $Q = \Omega$, pa je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$, ili $Q = \emptyset$, pa su sve nul-točke izolirane. □

Korolar 1.77. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ neprazan povezan otvoren skup, $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ i A skup*

$$A = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\} \ .$$

Ako skup A ima gomilište unutar skupa Ω, tada je $f(z) = g(z)$ za svaki $z \in \Omega$.

Dokaz : Tvrdnja slijedi primjenom prethodnog teorema na funkciju $f - g$. □

Analitičko produljenje. Pretpostavimo da imamo funkciju f koja je analitička na otvorenom povezanom skupu $O \subseteq \mathbb{C}$ i funkciju g koja je analitička na otvorenom povezanom skupu $U \subseteq \mathbb{C}$. Ako se skupovi O i U sijeku i ako je $f(z) = g(z)$ za sve $z \in O \cap U$, tada nam prethodni korolar govori kako je g jedina moguća analitička funkcija na skupu U s tim svojstvom. Naime, ako bi postojala još jedna funkcija h koja je analitička na skupu U i vrijedi $h(z) = f(z)$ za sve $z \in O \cap U$, tada bi vrijedilo i $h(z) = g(z)$ za sve $z \in O \cap U$, pa je prema prethodnom korolaru $h(z) = g(z)$ za sve $z \in U$. Sve skupa, ovo nam govori kako je analitičku funkciju, koja je na početku zadana na nekom manjem skupu, domenu moguće proširiti samo na jedan način.

§ 1.10 Singulariteti i reziduumi

Singularitet je općenito ime za točku u kojoj neka funkcija nije dobro definirana jer nije holomorfna ili se u osnovnoj definiciji svodi na neodređen izraz poput $0/0$ ili ∞/∞. Ovdje ćemo razmotriti kakve sve singularitete mogu imati kompleksne funkcije. Singularitete kompleksnih funkcija možemo prvo podijeliti na

(a) **izolirane**, odnosno točke $a \in \mathbb{C}$ za koje postoji okolina $O_a \subseteq \mathbb{C}$, takva da je f holomorfna na skupu $O_a - \{a\}$, ali nije holomorfna na skupu O_a, i

(b) sve ostale, odnosno **neizolirane**.

Nadalje, izolirane singularitete dijelimo na

1. **uklonjive** ($a_n = 0$ za sve $n < 0$),
2. **polove reda** $m \in \mathbb{N}$ ($a_{-m} \neq 0$ i $a_n = 0$ za sve $n < -m$) i

3. **bitne singularitete** ($a_n \neq 0$ za beskonačno mnogo $n < 0$).

Primjeri.

⋆ Funkcija

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$$

ima izolirane singularitete u točkama $z_k = 1/k$ za sve $k \in \mathbb{Z}$, te singularitet u $z = 0$ koji nije izoliran (on je gomilište niza svih onih drugih singulariteta).

⋆ Funkcija $f(z) = (\sin z)/z$ ima izoliran uklonjiv singularitet u $z = 0$. S druge strane, funkcija

$$g(z) = \begin{cases} (\sin z)/z\,, & z \neq 0 \\ 1\,, & z = 0 \end{cases}$$

čiji je razvoj u red potencija oko $z = 0$ dan s redom

$$g(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n}$$

je holomorfna i poklapa se s f za sve $z \neq 0$.

⋆ Funkcije

$$f_n(z) = \frac{1}{(z-c)^n}$$

imaju pol reda $n \in \mathbb{N}$ u točki c.

⋆ Funkcija

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

ima bitni singularitet u točki $z = 0$.

Definicija 1.78. Za kompleksnu funkciju f kažemo da je **meromorfna** na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako postoji skup $P \subseteq \Omega$, takav da

1. $f \in \mathscr{H}(\Omega - P)$,
2. f ima pol u svakoj točki skupa P i
3. P nema gomilišta u skupu Ω.

Naredni teorem nam govori nešto o ponašanju kompleksne funkcije u okolini bitnog singulariteta.

Teorem 1.79 (Casorati-Weierstraß). *Neka je f kompleksna funkcija koja ima bitni singularitet u $s \in \mathbb{C}$ s okolinom O_s, takvom da je $f \in \mathscr{H}(O_s - \{s\})$. Tada je za svaku okolinu $U_s \subseteq O_s$ skup $f(U_s - \{s\})$ gust u $\mathbb{C}$, odnosno svaki kompleksan broj je njegovo gomilište.*

Definicija 1.80. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i f meromorfna funkcija na skupu Ω. Nadalje, neka je $w \in \Omega$ izoliran singularitet funkcije f i $R > 0$, takav da unutar otvorenog kruga $B(w, R) \subseteq \Omega$ nema drugih singulariteta funkcije f. **Reziduum** funkcije f u točki $w \in \mathbb{C}$ definiran je integralom

$$\operatorname{Res}(f, w) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, \mathrm{d}z \tag{1.70}$$

po pozitivno orijentiranoj kružnici $C \subseteq B(w, R)$ sa središtem u točki w.

Kao direktnu posljedicu ranije dokazane formule za koeficijente u Laurentovom razvoju kompleksnih funkcija imamo naredni teorem.

Teorem 1.81. *Reziduum funkcije f u točki c jednak je "minus prvom" koeficijentu u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke c,*

$$\operatorname{Res}(f, c) = a_{-1} \tag{1.71}$$

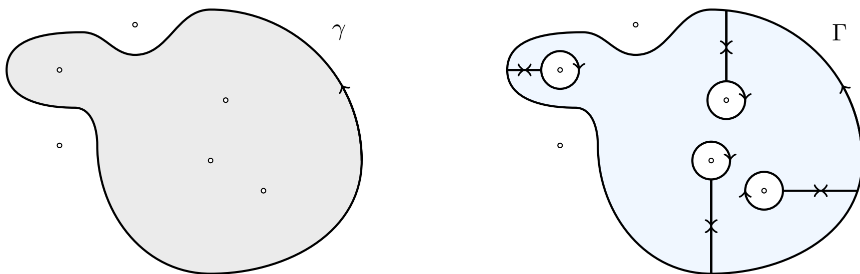
Teorem 1.82 (Teorem o reziduumu). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren jednostavno povezan skup, f meromorfna funkcija na skupu Ω i $P \subseteq \Omega$ skup polova funkcije f. Tada za svaki zatvoren, pozitivno orijentiran, po dijelovima C^1 put $\gamma : [a, b] \to \Omega - P$, čija je slika Jordanova krivulja koja omeđuje skup O vrijedi*

$$\oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{p \in O \cap P} \operatorname{Res}(f, p) \tag{1.72}$$

DOKAZ : Ako konstruiramo pomoćnu (pozitivno orjentiranu) integracijsku krivulju Γ "bušenjem puteva" do (pozitivno orjentiranih) kružnica C_p od kojih svaka okružuje pojedinačni pol p, tada imamo

$$0 = \oint_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{p \in O \cap P} \oint_{C_p} f(z)\, \mathrm{d}z$$

Važno je uočiti kako pri tom polovi van skupa O ne doprinose vrijednosti integrala. Konačno, uvrštavanjem definicije reziduuma dobivamo traženu formulu.



□

Teorem 1.83. *Neka je $w \in \mathbb{C}$ pol reda $m \geq 1$ funkcije f. Tada je reziduum moguće izračunati pomoću formule*

$$\mathrm{Res}(f,w) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to w} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \big((z-w)^m f(z) \big) \tag{1.73}$$

Dokaz : Ako funkcija f ima pol reda m u točki w, tada je njen Laurentov razvoj oko te točke oblika

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

$$(z-w)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-w)^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z-w)^k$$

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \big((z-w)^m f(z) \big) = \sum_{k=m-1}^{\infty} a_{k-m} k(k-1)\cdots(k-(m-1)+1)(z-w)^{k-(m-1)}$$

Puštanjem limesa $z \to w$ "preživi" samo konstantni, $k = m-1$ član sume,

$$\lim_{z\to w} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \big((z-w)^m f(z) \big) = a_{-1}(m-1)!$$

Odavde slijedi tvrdnja. □

Primjer.

Komentar 1.84. Cauchyjeva glavna vrijednost integrala (Cauchy principal value). U slučaju kada podintegralna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima jednu singularnu točku $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{s-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{s+\epsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \tag{1.74}$$

i analogno kada imamo više singularnih točaka. //

§ 1.11 Sumiranje redova pomoću kompleksnih integrala

Nedovršeno.

2

Gama, beta, zeta

§ 2.1 Gama funkcija

Teorija gama funkcije razvila se u vezi s problemom generalizacije faktorijele prirodnih brojeva, odnosno problemom traženja funkcije realne varijable koja poprima vrijednost $n!$ za prirodne brojeve n. Povijesna crtica: Leonhard Euler prvo u pismu Christianu Goldbachu 13. listopada 1729. godine predlaže upotrebu formule,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

a zatim u pismu 8. srpnja 1730. upotrebu integrala

$$\int_0^1 \left(\ln(1/t)\right)^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

Adriene-Marie Legendre 1809. godine daje ovoj funkciji ime Γ.

Definicija 2.1. **Faktorijel** $n!$ je definiran za prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$,

$$n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Konvencionalno definiramo i $0! \equiv 1$. **Parna** i **neparna faktorijela** označavaju se s dvostrukim uskličnikom,

$$(2n)!! \equiv 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n-2) \cdot 2n\,, \quad (2n-1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) \tag{2.2}$$

Opet, konvencionalno definiramo $0!! = 1$.

Valja uočiti sljedeće identitete,

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n-2) \cdot 2n = 2^n \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n) = 2^n\, n! \tag{2.3}$$

$$(2n)! = (2n-1)!!\,(2n)!! = 2^n\, n!\,(2n-1)!! \tag{2.4}$$

Definicija 2.2. Pochhammerov simbol (prema matematičaru Leu Augustu Pochhammeru):

$$(z)_n \equiv z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)\,, \quad (z)_0 = 1$$

$$(z)_{n+k} = (z)_n \cdot (z+n)_k$$

Na primjer, $n! = (1)_n$.

Sada tražimo funkciju realne varijable koja za prirodne brojeve poprima vrijednost faktorijele. Promotrimo naredni (realni) integral za $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{2.5}$$

Prvo valja ustvrditi područje konvergiranja ovog integrala. Integral ćemo podijeliti u dva dijela. Za sve $\epsilon \in \langle 0, 1\rangle$ i $x > 0$ vrijedi

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t < \int_\epsilon^1 t^{x-1}\, \mathrm{d}t = \frac{t^x}{x}\bigg|_\epsilon^1 = \frac{1-\epsilon^x}{x} < \frac{1}{x}$$

Podintegralna funkcija je pozitivno definitna, pa integral $I(\epsilon)$ raste kako se ϵ smanjuje uz fiksan x, a omeđen je odozgo s $1/x$ i stoga vrijedi

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) < \infty$$

Nadalje, za $t > 0$ svaki član u Taylorovom razvoju eksponencijalne funkcije e^t je pozitivan, pa vrijedi $e^t > t^n/n!$, odnosno $e^{-t} < n!/t^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odavde slijedi

$$t^{x-1} e^{-t} < \frac{n!}{t^{n+1-x}}$$

Za svaki $M > 1$, uz fiksan $x > 0$ i $n > x + 1$ vrijedi

$$J(M) = \int_1^M t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t < \int_1^M \frac{n!}{t^{n+1-x}}\, \mathrm{d}t = n!\, \frac{t^{-(n-x)}}{-(n-x)}\bigg|_1^M =$$

$$= \frac{n!}{n-x}\left(1 - M^{-(n-x)}\right) < \frac{n!}{n-x}$$

Podintegralna funkcija je pozitivno definitna, pa integral $J(M)$ raste kako M raste uz fiksan x, a omeđen je odozgo s $n!/(n-x)$ i stoga vrijedi

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \lim_{M\to\infty} J(M) < \infty$$

Dakle, funkcija $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definirana integralom

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{2.6}$$

konvergira za sve $x > 0$.

Teorem 2.3.

$$\Gamma(1) = 1 \;, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.7}$$

DOKAZ :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1$$

Nadalje, koristeći parcijalnu integraciju, imamo

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left\{u = t^x \,,\ \mathrm{d}v = e^{-t}\,\mathrm{d}t\right\} =$$

$$= -t^x e^{-t}\big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

□

Odavde indukcijom za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.8}$$

Ponekad se upotrebljava i oznaka $\Pi(z) \equiv \Gamma(z+1)$, pa je $\Pi(n) = n!$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Općenito za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1) = \cdots = (x)_n\Gamma(x) \tag{2.9}$$

Integral kojim je definirana funkcija Γ divergira u $x = 0$, međutim, koristeći gornju jednakost možemo proširiti funkciju Γ na neke negativne vrijednosti argumenta x. Konkretno, za sve $-n < x < -n+1$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\Gamma(x) \equiv \frac{\Gamma(x+n)}{(x)_n} = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{2.10}$$

Time je domena funkcije Γ proširena s $\mathbb{R}^+$ na $\mathbb{R} - \{0,-1,-2,\dots\}$. Promotrimo neke specijalne vrijednosti gama funkcije za necjelobrojne vrijednosti argumenta.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left\{u = \sqrt{t}\right\} = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = (1/2)_n\,\Gamma(1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\,\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)}{(-n+\frac{1}{2})_n} = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\,\sqrt{\pi}$$

Odavde vidimo da se gama funkcija približava proizvoljno blizu realnoj osi: za svaki $\epsilon > 0$, uvijek je moguće odabrati dovoljno velik n, tako da vrijedi

$$\left|\Gamma\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\right| < \epsilon$$

Koliko je jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uvjete $f(1) = 1$ i $f(x+1) = xf(x)$? Koristeći periodičnost trigonometrijskih funkcija jednostavno konstruiramo dodatne primjere, poput

$$f(x) = \cos(2m\pi x)\Gamma(x)$$

gdje je $m \in \mathbb{N}$. Pitanje je stoga koje svojstvo izdvaja funkciju Γ od svih drugih?

Definicija 2.4. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ povezan skup. Kažemo da je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ **konveksna** ako za sve $a, b, x \in S$, takve da je $a < x < b$ vrijedi

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2.11}$$

Kažemo da je funkcija $f : S \to \mathbb{R}^+$ **logaritamski konveksna** ako je funkcija $\ln(f)$ konveksna.

Uvjet konveksnosti možemo napisati u obliku

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \, . \tag{2.12}$$

Valja uočiti kako konveksna funkcija zadovoljava uvjet (2.12) i onda kada vrijedi

- $x < a < b$, u što se uvjerimo raspisivanjem nejednakosti

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

- $x < b < a$, u što se uvjerimo raspisivanjem nejednakosti

$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} < \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

Nadalje, svaki $x \in \langle a, b\rangle$ je moguće zapisati u obliku $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ za neki parametar $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, pa uvjet konveksnosti možemo pisati u obliku

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \tag{2.13}$$

Ponekad je koristan sljedeći kriterij za konveksnost.

Teorem 2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ povezan skup i $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2. Ako za sve $x \in S$ vrijedi $f''(x) \geq 0$, tada je f konveksna funkcija.*

DOKAZ : Neka su $a, b, x \in S$ takvi da je $a < x < b$. Iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti znamo da postoji $y \in \langle a, x\rangle$ i $z \in \langle x, b\rangle$, takvi da je

$$f(x) = f'(y)(x - a) + f(a) \, , \quad f(b) = f'(z)(b - x) + f(x)$$

No, kako je po pretpostavci $f''(x) \geq 0$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$, tada je $f'(y) \leq f'(x) \leq f'(z)$, pa iz gornjih jednakosti slijede nejednakosti

$$f(x) \leq f'(x)(x-a) + f(a)\ , \quad f(b) \geq f'(x)(b-x) + f(x)$$

odnosno

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'(x) \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$$(b-x)(f(x)-f(a)) \leq (x-a)(f(b)-f(x))$$

Pregrupiranjem članova imamo

$$(b-a)f(x) \leq (b-a)f(a) + (x-a)(f(b)-f(a))$$

odakle, dijeljenjem s $b-a$ slijedi konveksnost funkcije f. □

Na primjer, odavde odmah vidimo da su funkcije $f(x) = x^2$ i $f(x) = e^x$ konveksne na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

Teorem 2.6. *Funkcija $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je logaritamski konveksna funkcija.*

Dokaz : Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$, $q > 0$ i

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Koristeći Hölderovu nejednakost imamo za sve $x, y \leq 0$

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty (t^{x-1}e^{-t})^{\frac{1}{p}}\, (t^{y-1}e^{-t})^{\frac{1}{q}}\, \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\Gamma(y)^{\frac{1}{q}}$$

Neka je

$$\lambda = \frac{1}{p} \in \langle 0, 1\rangle\ , \quad 1-\lambda = \frac{1}{q}$$

Koristeći upravo izvedenu nejednakost imamo

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda\, \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

$$\ln\big(\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)\big) \leq \ln\big(\Gamma(x)^\lambda\, \Gamma(y)^{1-\lambda}\big) = \lambda \ln\Gamma(x) + (1-\lambda)\ln\Gamma(y)$$

□

Teorem 2.7 (Bohr-Mollerup, 1922.). *Neka je $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

a) $\ln(f(x))$ *je konveksna funkcija (tj. $f(x)$ je* logaritamski konveksna*),*

b) $f(x+1) = xf(x)$*, i*

c) $f(1) = 1$*,*

Tada je $f(x) = \Gamma(x)$ za sve $x > 0$.

DOKAZ : Koristeći samo svojstva navedena u teoremu konstruirat ćemo eksplicitan oblik (jedinstvene) funkcije koja ih zadovoljava. Prvo ćemo razmotriti $x \in \langle 0, 1]$ i $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Uvjet logaritamske konveksnosti, primjenjen u obliku nejednakosti (2.12) za funkciju $\ln f$, u kojoj držimo $a = n$, a za x i b uvrštavamo redom $n-1$ i $n+x$ pa $n+x$ i $n+1$, daje

$$\frac{\ln f(-1+n) - \ln f(n)}{(-1+n)-n} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\ln f(1+n) - \ln f(n)}{(1+n)-n}$$

$$-\ln f(-1+n) + \ln f(n) \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x} \leq \ln f(1+n) - \ln f(n)$$

$$f(n) = (n-1)!\,, \quad \frac{f(n)}{f(n-1)} = n-1\,, \quad \frac{f(n+1)}{f(n)} = n$$

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln(n-1)!}{x} \leq \ln n$$

$$\ln\big((n-1)!(n-1)^x\big) \leq \ln f(x+n) \leq \ln\big((n-1)!n^x\big)$$

Funkcija $\ln$ je monotono rastuća, pa odavde slijedi

$$(n-1)!(n-1)^x \leq f(x+n) \leq (n-1)!n^x$$

Koristeći $f(x+n) = (x)_n f(x)$ imamo nadalje

$$\frac{(n-1)!(n-1)^x}{(x)_n} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n}$$

Obje nejednakosti vrijede za sve $n \geq 2$, pa stavimo na lijevoj strani $n \to n+1$

$$\frac{n!n^x}{(x)_{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n} = \frac{n!n^x}{(x)_{n+1}} \frac{x+n}{n}$$

Puštanjem limesa $n \to \infty$ uz fiksan x vidimo da je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x)_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

za sve funkcije koje zadovoljavaju 3 uvjeta iz teorema. S obzirom da je gama funkcija jedna takva, ova jednakost vrijedi i za nju,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Za kraj želimo provjeriti valjanost dobivenog izraza van intervala $\langle 0, 1]$. Ako uvedemo pokratu

$$\Gamma_n(x) \equiv \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

tada je

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\,\frac{n}{x+n+1}\,, \quad \Gamma_n(x) = \frac{1}{x}\,\frac{x+n+1}{n}\,\Gamma_n(x+1)$$

Iz ovih jednakosti je vidljivo kako postojanje limesa $\lim_{n\to\infty}\Gamma(x)$ povlači postojanje limesa $\lim_{n\to\infty}\Gamma(x+1)$ i obratno, postojanje limesa $\lim_{n\to\infty}\Gamma(x+1)$ za $x \neq 0$ povlači postojanje limesa $\lim_{n\to\infty}\Gamma(x)$. To znači da je funkcija

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$$

dobro definirana za sve $x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$, a zadovoljava jednakost $f(x+1) = xf(x)$, a stoga i $f(x) = \Gamma(x)$ za sve vrijednosti argumenta na spomenutom skupu. □

Kako analitički produljiti funkciju Γ na kompleksnu ravninu? Za početak vidimo da je početni integral konvergentan za sve vrijednosti kompleksne varijable z s $\mathrm{Re}(z) > 0$ jer za svaki $z = x + iy$ vrijedi

$$|t^z| = |t^{x+iy}| = t^x |t^{iy}| = t^x$$

$$\left|\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\infty |t^{z-1}| e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

pa je funkcija

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

dobro definirana kad god je $\Gamma(x) < \infty$. Također, moguće je dokazati kako je ovako definirana funkcija Γ holomorfna na cijelom skupu $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Nadalje, identičnim izvodom kao i za pozitivne realne brojeve, vidimo da jednakost

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.14}$$

vrijedi za sve $\mathrm{Re}(z) > 0$. Odavde, koristeći taktiku kao i kod realnih vrijednosti argumenta, možemo definirati gama funkciju za sve kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$. Konkretno, ako je $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ i $-n \leq \mathrm{Re}(z) \leq -n+1$ ili $\mathrm{Im}(z) = 0$ i $-n < \mathrm{Re}(z) < -n+1$, definiramo

$$\Gamma(z) \equiv \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \tag{2.15}$$

Lako se uvjerimo da je ovako definirana funkcija uistinu holomorfna na navedenom skupu. Konačno, limes

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{2.16}$$

je dobro definiran za sve $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$.

Teorem 2.8 (Polovi gama funkcije). *Gama funkcija ima singularitete u točkama $z_n = -n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i oni su polovi 1. reda. Reziduumi gama funkcije u ovim točkama iznose*

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{2.17}$$

Dokaz :

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z-n+1)}{z-n} = \frac{\Gamma(z-n+2)}{(z-n)(z-n+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(z+1)}{(z-n)(z-n+1)\cdots(z-1)z}$$

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{w\to -n}(w+n)\Gamma(w) = \lim_{z\to 0} z\,\Gamma(z-n) =$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-2)(-1)} = \frac{1}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

□

Lema 2.9. *Limes*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

postoji i poznat je kao **Euler-Mascheronijeva konstanta**.

DOKAZ : Ako je $f(x_0) < g(x_0)$ i vrijedi $f'(x) \le g'(x)$ za sve $x \ge x_0$, tada je nužno $f(x) < g(x)$ za sve $x \ge x_0$. Ovi uvjeti su zadovoljeni za funkcije $f(x) = x^\lambda$ i $g(x) = 1 + \lambda(x-1)$, gdje je $x \ge x_0 = 0$ i $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, pa za sve $x \ge 0$ vrijedi

$$x^\lambda < 1 + \lambda(x-1)$$

Neka su $a > b > 0$. Uvrštavanjem $x = 1 + 1/b$ i $\lambda = b/a$, pa $x = 1 - 1/(b+1)$ i $\lambda = (b+1)/(a+1)$ dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b < \left(1+\frac{1}{a}\right)^a \ , \qquad \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1} > \left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}$$

odakle vidimo da funkcija $(1+1/x)^x$ raste, a funkcija $(1+1/x)^{x+1}$ pada.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$$

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Logaritmiranjem ...

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Promatramo nizove

$$a_n = H_n - \ln(n)\ , \quad b_n = a_n - \frac{1}{n} < a_n$$

Niz (a_n) monotono pada, a niz (b_n) monotono raste,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < 0\ , \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$$

Prema tome, niz (a_n) je monotono padajući i omeđen (primjetimo da je $a_n > b_n > b_1 = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$), te stoga konvergira i limes

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} a_n$$

postoji. □

Teorem 2.10 (Weierstraß). *Za sve* $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ *vrijedi*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \tag{2.18}$$

DOKAZ :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z(1+z)(1+z/2)\dots(1+z/n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{(\ln n - H_n)z} \frac{1}{z} \frac{e^z}{1+z} \frac{e^{z/2}}{1+z/2} \frac{e^{z/3}}{1+z/3} \dots \frac{e^{z/n}}{1+z/n} =$$

$$= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1+z/n}$$

□

Teorem 2.11.

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{2.19}$$

DOKAZ : Prvo dokažemo jednakost pomoću integralne definicije gama funkcije za realne brojeve $z \in \langle 0, 1\rangle$, a zatim usporedimo analitičnost funkcija s lijeve i desne strane tražene jednakosti.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \left\{t = x^2\right\} = 2\int_0^\infty x^{2z-1} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\Gamma(1-z) = \int_0^\infty t^{-z} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \left\{t = y^2\right\} = 2\int_0^\infty y^{1-2z} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}y\, x^{2z-1} y^{1-2z} e^{-(x^2+y^2)}$$

Sada koristimo supstituciju (prelazak na polarni koordinatni sustav),

$$x = r\cos\phi\,, \quad y = r\sin\phi\,, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4\int_0^\infty re^{-r^2}\, \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\, (\cos\phi)^{2z-1} (\sin\phi)^{1-2z} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{2z-1} (\sin\phi)^{1-2z}\, \mathrm{d}\phi = \left\{u = \sin^2\phi\right\} = \int_0^1 (1-u)^{z-1} u^{-z}\, \mathrm{d}u =$$

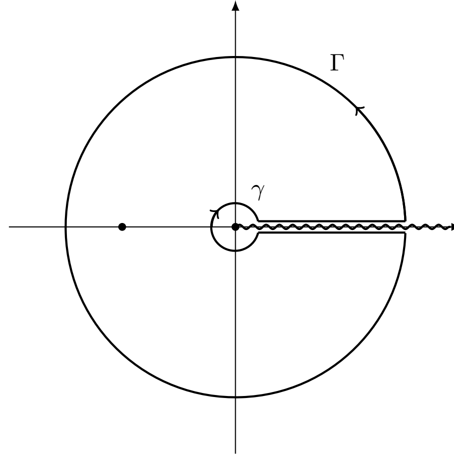
$$= \int_0^1 \left(\frac{1-u}{u}\right)^z \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \left\{v = \frac{1-u}{u}\right\} = \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v}\, \mathrm{d}v$$

Napomena oko supstitucije,

$$u = \frac{1}{1+v}\,, \quad \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}$$

Integral kojeg smo dobili rješit ćemo pomoću kompleksne integracije (realna varijabla v prelazi u općenitu kompleksnu w, a varijablu z sada pišemo kao x jer želimo naglasiti kako je ona zasad samo realan broj iz intervala $\langle 0, 1\rangle$)

$$\oint_C \frac{w^{x-1}}{1+w}\, \mathrm{d}w = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, -1) = 2\pi i (e^{i\pi})^{x-1} = -2\pi i\, e^{i\pi x}$$



Integrali po krivuljama Γ i γ iščezavaju jer

$$\left|\int_\Gamma \frac{w^{x-1}}{1+w}\,\mathrm{d}w\right| \leq 2R\pi\,\frac{R^{x-1}}{R-1} \to 0$$

$$\left|\int_\gamma \frac{w^{x-1}}{1+w}\,\mathrm{d}w\right| \leq 2\rho\pi\,\frac{\rho^{x-1}}{1-\rho} \to 0$$

$$\oint_C \frac{w^{x-1}}{1+w}\,\mathrm{d}w = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}-(ve^{2\pi i})^{x-1}}{1+v}\,\mathrm{d}v = (1-e^{2\pi ix})I$$

$$I = -2\pi i\,\frac{e^{i\pi x}}{1-e^{i2\pi x}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Time smo dokazali da jednakost vrijedi za sve $z \in \langle 0,1\rangle$. Sada valja uočiti kako s obje strane jednakosti stoje kompleksne funkcije koje su holomorfne na skupu $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$. Kako skup $\langle 0,1\rangle \subseteq (\mathbb{C}-\mathbb{Z})$, na kojem smo ustanovili jednakost ovih funkcija, ima gomilište u skupu $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ (štoviše, *svaka* njegova točka mu je gomilište), preko teorema o jedinstvenosti slijedi jednakost među funkcijama na cijeloj domeni. □

Teorem 2.12. *$\Gamma(z)$ nema nul-točaka.*

DOKAZ : Pretpostavimo da je $\Gamma(z_0) = 0$ za neki kompleksan broj $z_0 \notin \{0,-1,-2,\dots\}$. Kako je $\sin(\pi z)$ cijela funkcija, znamo da vrijedi

$$\lim_{z\to z_0}\Gamma(1-z) = \lim_{z\to z_0}\frac{\pi}{\Gamma(z)\sin(\pi z)} = \infty$$

No, mi već znamo u kojim točkama gama funkcija divergira, pa odavde zaključujemo da je $1-z_0 = -n$, gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, odnosno

$$z_0 = 1+n \in \mathbb{N}$$

Međutim, $\Gamma(1+n) = n! \neq 0$, što je kontradikciji s početnom pretpostavkom. □

Primjer: površina n-dimenzionalne jedinične sfere S^n i volumen n-dimenzionalne jedinične kugle K^n

Osnovni integral,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Koristeći Kartezijev i polarni koordinatni sustav imamo

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,e^{-(x^2+y^2)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\,r\,e^{-r^2} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$$

Stoga,

$$I = \sqrt{\pi}$$

i općenito, za sve $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

U svrhu računanja površine sfere S^n poslužit ćemo se trikom prilikom integriranja. Promotrimo prvo za zagrijavanje slučaj 2-dimenzionalne sfere S^2. Ideja je zapisati integral funkcije

$$f(x,y,z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\,(x^2+y^2+z^2)\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z\right) = (2\pi)^{3/2}$$

S druge strane, koristeći supstituciju $t = r^2/2$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}V = \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega_2 \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\,r^2 e^{-r^2/2} = A_2\sqrt{2}\int_0^{\infty} \mathrm{d}t\,t^{1/2}e^{-t} = A_2\sqrt{2}\,\Gamma(3/2)$$

Odakle zaključujemo

$$A_2 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2}\,\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi$$

Volumen

$$V_3 = \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega_2 \int_0^1 r^2\,dr = \frac{A_2}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Sada općenito

$$f(x_1,\dots,x_{n+1}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\,\mathrm{d}V = \prod_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_k^2/2}\,\mathrm{d}x_k = (2\pi)^{\frac{n+1}{2}}$$

S druge strane,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\,\mathrm{d}V = \int_{S^n} \mathrm{d}\Omega_n \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\,r^n e^{-r^2/2} = A_n 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\,t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t} =$$

$$= A_n 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Usporedbom imamo

$$A_n = 2\,\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \tag{2.20}$$

Konačno,

$$V_{n+1} = A_n \int_0^1 r^n \,\mathrm{d}r = \frac{A_n}{n+1}$$

odnosno

$$V_n = \frac{A_{n-1}}{n} \tag{2.21}$$

Ako nas zanimaju površina n-sfere općenitog radijusa R i volumen n-kugle radijusa R, tada imamo

$$A_n(R) = A_n R^n \ , \quad V_n(R) = V_n R^n \tag{2.22}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8}{3}\pi^2$	π^3	$\frac{16}{15}\pi^3$	$\frac{1}{3}\pi^4$	$\frac{32}{105}\pi^4$	$\frac{1}{12}\pi^5$	$\frac{64}{945}\pi^5$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_n	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi^2$	$\frac{8}{15}\pi^2$	$\frac{1}{6}\pi^3$	$\frac{16}{105}\pi^3$	$\frac{1}{24}\pi^4$	$\frac{32}{945}\pi^4$	$\frac{64}{10395}\pi^5$

Zanimljivo je uočiti kako A_n i V_n ne rastu monotono s n, već imaju maksimalne vrijednosti nakon kojih monotono padaju! Konkretno, površina A_n je najveća za $n = 6$, a volumen V_n za $n = 5$. Ovaj fenomen možemo intuitivno objasniti. Oba izraza su oblika π^x kroz $\Gamma(x)$. Brojnik raste kao potencija, a nazivnik (otprilike) kao faktorijela. To znači da će nakon određenog broja faktora nazivnik "preteći" brojnik, te će se ta razlika nastaviti povećavati.

Kako intuitivno razumijeti limese $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$?



Teorem 2.13 (Legendre, Gauss). *Multiplikacijska formula,*

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{(m-1)/2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right) \tag{2.23}$$

Neka svojstva gama funkcije

$$\Gamma(z^*) = (\Gamma(z))^*$$

$$|\Gamma(x+iy)| = |\Gamma(x)| \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}\right)^{-1/2}$$

Za $n, a, b \in \mathbb{N}\ ,\ a < b$ vrijedi

$$\Gamma\left(n + \frac{a}{b}\right) = \frac{\Gamma(a/b)}{b^n} \sum_{k=0}^{n-1} (a + kb)$$

Koja su svojstva derivacija gama funkcije?

Definicija 2.14. Digama funkcija,

$$\Psi(z) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\ln \Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{2.24}$$

Analogno, **poligama funkcije** za sve $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Psi_n(z) \equiv \Psi^{(n)}(z) \tag{2.25}$$

gdje je konvencionalno $\Psi_0(z) = \Psi(z)$. Sve poligama funkcije su definirane na istoj domeni kao i gama funkcija.

Korištenjem Weierstrassove definicije gama funkcije imamo

$$-\ln(\Gamma(z)) = \ln(z) + \gamma z + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{z}{p}\right) - \frac{z}{p}\right)$$

Deriviramo li obje strane,

$$\Psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z+p}\right) = -\gamma + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z+p-1}\right)$$

$$\Psi'(z) = \Psi_1(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(z+p-1)^2}\ , \quad \Psi''(z) = \Psi_2(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-2}{(z+p-1)^3}$$

i općenito

$$\Psi^{(n)}(z) = \Psi_n(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n!}{(z+p-1)^{n+1}}$$

Sada je vidljivo kako je $\Psi'(z) > 0$, odnosno $(\ln\Gamma(z))'' > 0$ na cijelom području definicije gama funkcije, što znači da je $\ln(\Gamma(z))$ konveksna funkcija. Neke konkretne vrijednosti,

$$\Psi(1) = -\gamma\,, \quad \Psi_1(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\,, \quad \Psi_2(1) = -2\zeta(3)$$

$$\Psi_n(1) = (-1)^{n+1}\, n!\, \zeta(n+1)$$

$$\Psi(n) = -\gamma + H_{n-1}$$

Teorem 2.15 (Gauss). *Neka su $p, q \in \mathbb{N}$, takvi da je $p < q$. Tada vrijedi*

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \ln(2q) + \sum_{k=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi k p}{q}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right)$$

Rekurzija:

$$\Psi_n(z+1) = \Psi_n(z) + \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$$

Logaritmiranjem i deriviranjem relacije $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/(\sin(\pi z))$ dobivamo

$$\Psi(z) - \Psi(1-z) = -\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

$$\Psi(1-z) = \Psi(z) + \pi\operatorname{ctg}(\pi z)$$

Napomena:

$$(\ln\Gamma(f(z)))' = \frac{\partial(\ln\Gamma(f(z)))}{\partial f(z)}\, f'(z) = \Psi(f(z)) f'(z)$$

Deriviranjem formule $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ dobivamo

$$\Gamma'(z+1) = \Gamma(z) + z\,\Gamma'(z)$$

Nadalje, dijeljenjem s $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$$\frac{\Gamma'(z+k+1)}{\Gamma(z+k+1)} = \frac{1}{z+k} + \frac{1}{z+k-1} + \cdots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Uvrštavanjem $z = n \in \mathbb{N}$, $k = 0$:

$$\Gamma'(n+1) = (H_n - \gamma)\, n!$$

$$\Gamma''(1) = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2$$

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)} = -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$$

§ 2.2 Beta funkcija

Beta funkciju uveo je Euler 1730. godine, a moderno ime joj je prvi dao Jacques Binet 1839. godine.

Definicija 2.16. **Beta funkcija** je definirana integralom

$$B(z,w) \equiv \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t \tag{2.26}$$

za sve $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$.

Teorem 2.17. *Beta funkcija je simetrična,*

$$B(z,w) = B(w,z) \tag{2.27}$$

i vrijedi formula

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2.28}$$

Dokaz : a)

$$B(z,w) = \{u = 1-t\} = \int_1^0 (1-u)^{z-1}u^{w-1}\,(-\mathrm{d}u) =$$

$$= \int_0^1 u^{w-1}(1-u)^{z-1}\,\mathrm{d}u = B(w,z)$$

b)

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}\,\mathrm{d}u \int_0^\infty e^{-v}v^{w-1}\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v}u^{z-1}v^{w-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Uvođenjem varijabli $u = rs$ i $v = (1-r)s$, odnosno $s = u+v$ i $r = u/(u+v)$, dobivamo

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty s\,\mathrm{d}s \int_0^1 \mathrm{d}r\, e^{-s}(rs)^{z-1}\big((1-r)s\big)^{w-1} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-s}s^{z+w-1}\,\mathrm{d}s \int_0^1 r^{z-1}(1-r)^{w-1}\,\mathrm{d}r = \Gamma(z+w)B(z,w)$$

□

$$B(z,w) = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{w^{n+1}}{(z+n)n!}$$

$$pB(p,q+1) = qB(p+1,q)$$

$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$$

$$(p+q)B(p,q+1) = qB(p,q)\ , \quad (p,q>0)$$

$$B(p,q)B(p+q,r) = B(q,r)B(q+r,p) = B(r,p)B(r+p,q)$$

$$B(z,z) = 2^{1-2z}B(1/2,z)$$

$$B(p,n+1) = \frac{n!}{(p)_{n+1}}$$

Primjeri:

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2^{p+q-1}B(p,q) = 2^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx = B(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4!3!}{8!} = \frac{1}{280}$$

Dirichletovi integrali. Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kompaktan skup omeđen plohom

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$$

i koordinatnim ravninama, a sve konstante $\{a,b,c,p,q,r\}$ su pozitivni realni brojevi, tada vrijedi

$$\int_\Omega x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)}$$

DOKAZ : Prvo uvedemo privremene varijable

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}\ , \quad \tilde{y} = \frac{y}{b}\ , \quad \tilde{z} = \frac{z}{b}$$

$$\tilde{x}^p + \tilde{y}^q + \tilde{z}^r = 1$$

$$I = a^\alpha b^\beta c^\gamma \int_\Omega \tilde{x}^{\alpha-1}\tilde{y}^{\beta-1}\tilde{z}^{\gamma-1}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{z}$$

Nakon toga uvodimo novi skup varijabli,

$$u = \tilde{x}^p\ , \quad v = \tilde{y}^q\ , \quad w = \tilde{z}^r$$

Integraciju sada vršimo po skupu omeđenom koordinatnim ravninama i ravninom

$$u + v + w = 1$$

zbog čega su vrijednosti svake od novih varijabli ograničene na vrijednosti iz segmenta $[0,1]$. Koristeći

$$\tilde{x}^{\alpha-1}\mathrm{d}\tilde{x} = \frac{\mathrm{d}u}{p}\, u^{\frac{\alpha}{p}-1}\,, \quad \tilde{y}^{\beta-1}\mathrm{d}\tilde{y} = \frac{\mathrm{d}v}{q}\, v^{\frac{\beta}{q}-1}\,, \quad \tilde{z}^{\gamma-1}\mathrm{d}\tilde{z} = \frac{\mathrm{d}w}{r}\, w^{\frac{\gamma}{r}-1}$$

imamo

$$\begin{aligned} I = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{1-u} \mathrm{d}v \int_0^{1-u-v} \mathrm{d}w\, u^{\frac{\alpha}{p}-1} v^{\frac{\beta}{q}-1} w^{\frac{\gamma}{r}-1} = \\ = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{1-u} \mathrm{d}v\, u^{\frac{\alpha}{p}-1} v^{\frac{\beta}{q}-1} \frac{w^{\frac{\gamma}{r}}}{\frac{\gamma}{r}} \Big|_0^{1-u-v} = \\ = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \frac{r}{\gamma} \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{1-u} \mathrm{d}v\, u^{\frac{\alpha}{p}-1} v^{\frac{\beta}{q}-1} (1-u-v)^{\frac{\gamma}{r}} = \left\{ \xi = \frac{v}{1-u} \right\} = \\ = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \frac{r}{\gamma} \int_0^1 \mathrm{d}u\, u^{\frac{\alpha}{p}-1} (1-u)^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, \xi^{\frac{\beta}{q}-1} (1-\xi)^{\frac{\gamma}{r}} = \\ = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \frac{r}{\gamma} \int_0^1 \mathrm{d}u\, u^{\frac{\alpha}{p}-1} (1-u)^{\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}} B\left(\frac{\beta}{q}, \frac{\gamma}{r}+1 \right) = \\ = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \frac{r}{\gamma} B\left(\frac{\beta}{q}, \frac{\gamma}{r}+1 \right) B\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1 \right) = \\ = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \frac{r}{\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)} \end{aligned}$$

što nakon kraćenja daje rezultat koji smo htjeli pokazati. □

Primjer: pronađite masu materije unutar volumena omeđenog sferom radijusa R sa središtem u ishodištu i koordinatnim ravninama, ako je gustoća dana funkcijom

$$\rho(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$$

Ploha je dana jednadžbom $x^2+y^2+z^2=R^2$, pa imamo $b=c=R$, $p=q=r=2$, $\alpha=\beta=\gamma=3$

$$\begin{aligned} M = \int_\Omega \rho\, \mathrm{d}V = 8 \int_\Omega x^2 y^2 z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \\ = 8\, \frac{R^3 \cdot R^3 \cdot R^3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+3/2+3/2+3/2)} = \frac{4\pi R^9}{945} \end{aligned}$$

§ 2.3 Riemannova zeta funkcija

Harmonijski red

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\,, \quad \lim_{n\to\infty} H_n = \infty$$

Euler je pronašao sumu

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Poopćenje na kompleksne brojeve …

Definicija 2.18. **Riemannova zeta funkcija** ζ je definirana redom

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ , \tag{2.29}$$

za sve $\mathrm{Re}(s) > 1$ (tradicionalno se za argument ove funkcije upotrebljava slovo "s"). Riemannova zeta funkcija se može analitički produljiti na $\mathbb{C} - \{1\}$, pri čemu je jedini singularitet pol prvog reda u $s = 1$ s reziduumom 1.

Promotrimo prvo definiciju ove funkcije preko sume. Uvedemo li oznake za realni i imaginarni dio argumenta $s = \sigma + it$, tada za vrijedi

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma+it}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

Nadalje, za fiksan $\sigma > 0$ funkcija $u^{-\sigma}$ je strogo padajuća za pozitivne vrijednosti argumenta u, pa je

$$\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\sigma}} < \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u^{\sigma}}$$

Konačno, pretpostavimo li da je $\sigma > 1$, tada imamo gornju među

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{\sigma}} = \frac{1}{\sigma - 1} \ .$$

Zaključujemo kako je $\zeta(s)$ definirana sumom (2.29) apsolutno konvergentna za sve $\mathrm{Re}(s) > 1$. Štoviše, korištenjem Weierstraßovog M-testa možemo utvrditi da je ova suma uniformno konvergentna na istom području, iz čega slijedi da sumu (2.29) možemo derivirati "član po član", odakle se dokaže holomorfnost funkcije ζ na skupu $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Digresija — skica dokaza. Za svaki $\sigma_0 > 1$ možemo odabrati gornje međe $M_n = n^{-\sigma_0}$, odakle slijedi uniformna konvergentnost reda (2.29) za sve $\sigma \ge \sigma_0$. Također, deriviramo li ovaj red "član po član", dobiveni red

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}$$

će uniformno konvergirati na istom području (ovo opet provjerimo Weierstraßovim M-testom, koristeći pri tom činjenicu da je $n^{\epsilon} > \ln(n)$ za $\epsilon > 0$ i dovoljno velik prirodan broj n).

Nadalje, ako je $(f_n)_n$ niz funkcija na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, koji konvergira k funkciji $f : \Omega \to \mathbb{C}$, a niz $(f_n')_n$ je uniformno konvergentan, tada je $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$ za sve $z \in \Omega$. Uvedimo funkciju $g(z) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$, te promotrimo proizvoljne točke $z, z_0 \in B$ na otvorenoj kugli $B \subseteq \Omega$. Tada je

$$f_n(z) - f_n(z_0) = \int_{[z_0,z]} f_n'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Puštanjem limesa $n \to \infty$ s obje strane jednakosti i korištenjem pretpostavljene uniformne konvergencije (zbog koje limes i integral mogu zamijeniti mjesta) slijedi

$$f(z) - f(z_0) = \int_{[z_0,z]} g'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

pa je $g(z) = f'(z)$ na B. Upotrijebimo li ovaj rezultat na parcijalnim sumama $s_n(z) = \sum_k^n f_k(z)$ koje zadovoljavaju navedene pretpostavke o konvergentnosti, slijedi da takve redove možemo derivirati “član po član”. Koristeći ranije dokazana svojstva konvergentnosti sume (2.29), slijedi holomorfnost zeta funkcije na promatranom području.

Teorem 2.19.

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-2^{1-s}}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \tag{2.30}$$

Dokaz : Skica.

$$\frac{x^{s-1}}{e^x-1} = \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}} = x^{s-1}e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{s-1}e^{-kx}$$

Ovaj red konvergira uniformno, pa možemo izmjeniti poredak sume i integrala,

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-kx}\,\mathrm{d}x = \{t = kx\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \zeta(s)\Gamma(s)$$

Nadalje,

$$\frac{x^{s-1}}{e^x+1} = \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1+e^{-x}} = x^{s-1}e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-kx} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^{s-1}e^{-kx}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty (-1)^{k+1}x^{s-1}e^{-kx}\,\mathrm{d}x = \{t = kx\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-s}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-s}$$

Koristeći

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty}k^{-s} - 2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-s} = \big(1-2^{-s}\big)\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s} = (1-2^{-s})\zeta(s)$$

slijedi i drugi dio tvrdnje. □

Teorem 2.20.

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{2.31}$$

Dokaz : Skica. Neka je

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Promotrimo integral

$$\oint \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{Res}(2k\pi i, f) = (2k\pi i)^{s-1}\,, \quad \mathrm{Res}(0, f) = 0$$

$$\left(1 - e^{2\pi s i}\right) I = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} (2k\pi)^{s-1} \left(e^{\pi(s-1)i/2} + e^{3\pi(s-1)i/2}\right) =$$

$$= (2\pi)^s i \left(-ie^{\pi s i/2} + ie^{3\pi s i/2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} =$$

$$= (2\pi)^s e^{\pi s i}(-2i)\sin(\pi s/2)\zeta(1-s)$$

$$I = (2\pi)^s \,\frac{\sin(\pi s/2)}{\sin(\pi s)}\,\zeta(1-s) = (2\pi)^s \sin(\pi s/2)\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\pi}\,\zeta(1-s)$$

Usporedbom s $I = \Gamma(s)\zeta(s)$ slijedi rezultat. □

Nul-točke Riemannove zeta funkcije. Iz analitičkog produljenja vidimo da su tzv. trivijalne nul-točke Riemannove zeta funkcije u točkama $s = -2n$, gdje su $n \in \mathbb{N}$. Poznato je da sve ostale nul-točke leže u traci $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ (tzv. *kritična traka* ili *pruga*). Slavna, i još nedokazana Riemannova hipoteza (iz 1859. godine) tvrdi kako sve netrivijalne nul-točke funkcije ζ imaju realnu vrijednost $1/2$ (znamo da sve nul-točke unutar kritične trake dolaze u parovima $s = (1/2 \pm \epsilon) + it$ za neki $\epsilon \in [0, 1\rangle$, a svaka od njih u paru s kompleksno konjugiranom nul-točkom s^*).

vrijednost	komentar
$\zeta(0) = -1/2$	vrijednost dobivena analitičkim produljenjem
$\zeta(1) = \infty$	divergencija harmonijskog reda
$\zeta(2) = \pi^2/6$	Euler 1735. ("bazelski problem")
$\zeta(3) \approx 1.202$	Apéryjeva konstanta
$\zeta(4) = \pi^4/90$	
$\zeta(6) = \pi^6/945$	

Često spominjana kontradiktorna "jednakost",

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

ima svoje podrijetlo u zeta funkciji. Naime, pogrešnom upotrebom definicije zeta funkcije preko sume (van domene gdje ta suma konvergira) imamo

$$\zeta(-1) \text{ “=” } \sum_{n=1}^{\infty} n$$

S druge strane, analitičkim produljenjem slijedi

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2}\sin(-\pi/2)\Gamma(2)\zeta(2) = -\frac{1}{12}$$

Laurentov razvoj oko $s = 1$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{n!}\,(s-1)^n$$

Eulerova produktna formula povezuje Riemannovu zeta funkciju s prostim brojevima: označimo li s p_n za svaki $n \in \mathbb{N}$ n-ti prost broj, tada je za sve $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} \tag{2.32}$$

Ovo formulom je povezana "diskretna" teorija brojeva (s desne strane jednakosti) i "kontinuirana" kompleksna analiza (s lijeve strane jednakosti). Prvo tvrdimo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\zeta(s) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \sum_{n \in S_m} \frac{1}{n^s}$$

gdje je $S_n \subseteq \mathbb{N}$ skup brojeva koji *nisu* djeljivi s prvih n prostih brojeva $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Za svaki $\mathrm{Re}(s) > 1$ imamo

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n \in S_1} \frac{1}{n^s}$$

Stoga, gornja tvrdnja vrijedi za $m = 2$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\left(1 - \frac{1}{p_{m+1}^s}\right) \zeta(s) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{p_{m+1}^s}\right) \sum_{n \in S_m} \frac{1}{n^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_{m+1} n)^s} = \sum_{n \in S_{m+1}} \frac{1}{n^s}$$

pa tvrdnja slijedi indukcijom. Konačno, puštanjem limesa $m \to \infty$ dobivamo Eulerovu produktnu formulu. Primjetimo kako ova formula ujedno pokazuje da $\zeta(s)$ nema nul-točaka na dijelu kompleksne ravnine $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Ostale formule …

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!} \int_0^1 B_{2n+1}(x) \operatorname{ctg}(\pi x) \, \mathrm{d}x$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^2}$$

$$B_n = (-1)^{n+1} n \zeta(1-n) \,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta(2n+1) - 1) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1)=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}=\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right)$$

$$\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi)\;, \quad \zeta'(-1)=\frac{1}{12}-\ln A$$

A je tzv. Glaisher-Kinkelinova konstanta

$$\zeta'(-2n)=\frac{(-1)^n\zeta(2n+1)(2n)!}{2^{2n+1}\pi^{2n}}$$

Teorem 2.21 (Univerzalnost zeta funkcije, S.M. Voronin 1975.).
Neka je $0<r<1/4$*, te* $f(s)$ *funkcija koja je holomorfna za* $|s|<r$ *i neprekidna za* $|s|\leq r$*. Ako je* $f(s)\neq 0$ *za sve* $|s|<r$*, tada za svaki* $\epsilon>0$ *postoji realan broj* $T=T(\epsilon)$ *takav da je*

$$\max_{|s|\leq r}\left|f(s)-\zeta\left(s+\frac{3}{4}+iT\right)\right|<\epsilon\;.$$

Drugim riječima, u kritičnoj traci Riemannove funkcije možemo pronaći dijelove svih holomorfnih funkcija (a time i rješenja dvodimenzionalne elektrostatike) u proizvoljnoj aproksimaciji!

3

Aproksimacije funkcija

§ 3.1 Kvantificiranje približnog

Oznake o i O uveo je Paul Bachmann 1894. godine.

Definicija 3.1. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $f, g : S \to \mathbb{R}$ dvije neprekidne funkcije. Kažemo da je

O) $f(x) = O(g(x))$ kada $x \to x_0 \in \overline{S}$

ako postoje $K, \delta > 0$ takvi da za sve $x \in B(x_0, \delta) \subseteq S$ vrijedi $|f(x)| \leq K|g(x)|$; specijalno, kažemo da je $f(x) = O(g(x))$ kada $x \to \infty$ ako postoje $K, M > 0$ takvi da je $|f(x)| \leq K|g(x)|$ za sve $x > M$,

o) $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to x_0 \in \overline{S}$

ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za sve $x \in B(x_0, \delta) \subseteq S$ vrijedi $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$; specijalno, kažemo da je $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to \infty$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $M > 0$, takav da je $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ za sve $x > M$,

U prvom slučaju kažemo kako je funkcija f *asimptotski omeđena* funkcijom g kada $x \to x_0$, odnosno da je "f reda veliko O od g". U drugom slučaju kažemo kako je funkcija f *asimptotski manja* od funkcije g kada $x \to x_0$, odnosno da je "f reda malo o od g". Sve ove definicije možemo jednostavno poopćiti i na kompleksne funkcije.

Primjetimo, ako je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in S - \{x_0\}$, tada je $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to x_0$ akko je

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$$

Očigledno, $f(x) = o(g(x))$ povlači $f(x) = O(g(x))$, ali obrat općenito ne vrijedi.

Primjeri:

- ⋆ za polinom $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5$ vrijedi $f(x) = O(x^4)$ kada $x \to \infty$, ali $f(x) \neq o(x^4)$ kada $x \to \infty$; naime, za sve $x > 2$ vrijedi

$$|f(x)| \leq 6|x|^4 + 2|x|^3 + 5 \leq 13|x|^4$$

ali

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^4} = 6 \neq 0$$

- ⋆ za Taylorov razvoj analitičke funkcije f vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + O\big((x - x_0)^{N+1}\big)$$

Primjerice, $\sin(x) = x + O(x^2)$ kada $x \to 0$.

- ⋆ za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $e^{-x} = o(x^n)$ kada $x \to \infty$, te $e^{-x} = O(1)$ kada $x \to 0$

- ⋆ za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $\ln x = o(x^\epsilon)$ kada $x \to \infty$

Problemi s oznakom. Jednakost kod $f(x) = O(g(x))$ i $f(x) = o(g(x))$ nije tranzitivna. Na primjer, $x = O(x^2)$ i $x^2 = O(x^2)$ kada $x \to \infty$, ali $x \neq x^2$ (osim specijalno za $x = 0, 1$). Stoga bi preciznije bilo koristiti zapis poput $f(x) \in O(g(x))$ i $f(x) \in o(g(x))$.

Teorem 3.2. *Neka svojstva:*

- $o(f) \subseteq O(f)$
- $O(O(f)) \subseteq O(f)$
- $O(o(f)), o(O(f)), o(o(f)) \subseteq o(f)$
- $O(f) + O(f) = O(f) + o(f) = O(f), o(f) + o(f) = o(f)$
- $O(f)O(g) = O(fg), O(f)o(g) = o(f)o(g) = o(fg)$

gdje su

$$A + B = \{f + g \mid f \in A, g \in B\}$$

$$AB = \{fg \mid f \in A, g \in B\}$$

Nadalje, ako je $f_1 = O(g_1)$ i $f_2 = O(g_2)$, tada je $f_1 + f_2 = O(|g_1| + |g_2|)$, te $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.

§ 3.2 Divergiranje nije nužno loše

Zanima nas da li su divergentni redovi potpuno beskorisni ili se neki njihov (početni) dio može upotrijebiti za aproksimaciju dane funkcije. Ideja potječe od Poincaréa koji je ovaj koncept uveo u kontekstu problema u klasičnoj mehanici (H.Poincaré, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* Acta Math., 8 (1886) 295–344). Motivacijski primjer: Leonhard Euler je promatrao funkciju

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + \dots \tag{3.1}$$

Očigledno, ovaj red divergira za sve $x \neq 0$, pa se na prvu ruku čini potpuno beskorisnim. Međutim, Euler se poslužio heurističkim argumentom primjetivši kako funkcija f formalno zadovoljava linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$f = 1 - x(xf)' \tag{3.2}$$

Uobičajenim postupkom dobivamo opće rješenje oblika

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{x} \left(A + \int_0^x \frac{e^{-1/s}}{s}\, ds \right) , \quad A = \text{konst.}$$

Korištenjem supstitucije $t = s^{-1} - x^{-1}$ imamo

$$f(x) = A\, \frac{e^{1/x}}{x} + \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}\, dt$$

Rješenje s početnim uvjetom $f(0) = 1$ (odnosno $A = 0$) dano je integralom

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}\, dt \tag{3.3}$$

Ovo je dobro definirana, analitička funkcija za sve $x \geq 0$. U čemu je “kvaka”? Ako radimo razvoj pod integralom dobivamo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}\, dt = \int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-tx)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n$$

što naizgled odgovara redu (3.1), ali je postupak pogrešan jer upotrebljen razvoj funkcije $(1 - tx)^{-1}$ konvergira za $|tx| < 1$, a mi vršimo integraciju na intervalu koji se proteže do $t = \infty$. Ovo nam ujedno baca svjetlo na uzrok divergentnog ponašanja reda s kojim smo počeli razmatranje.

Pa ipak, ako je x dovoljno mali, članovi u sumi (3.1) padaju dovoljno brzo, pa neki konačni dio reda ipak može dati dovoljno dobru aproksimaciju funkcije f definirane integralom u (3.3). Promotrimo prvih N članova,

$$\frac{1}{1+tx} = \sum_{n=0}^{N-1} (-tx)^n + R_{(N)}(tx) \tag{3.4}$$

i procjenimo veličinu ostatka $R_{(N)}(tx)$. Za početak, koristeći izraz za sumu geometrijskog reda, imamo

$$R_{(N)}(tx) = \frac{1}{1+tx} - \frac{(-tx)^N - 1}{-tx-1} = \frac{(-tx)^N}{1+tx}$$

Uvrštavanjem ovog razvoja u integral (3.3), formalno imamo

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} n!(-x)^n \right) + \int_0^\infty e^{-t} R_{(N)}(tx)\, dt$$

Veličina drugog člana određuje pogrešku prilikom aproksimacije funkcije f konačnom sumom u prvom članu. Tvrdimo kako je (za fiksni N)

$$\int_0^\infty e^{-t} R_{(N)}(tx)\, dt = (-x)^N \int_0^\infty \frac{t^N e^{-t}}{1+tx}\, dt = O(x^N) \quad \text{kada} \quad x \to 0$$

Naime,

$$\lim_{x\to 0} \int_0^\infty \frac{t^N e^{-t}}{1+tx}\, dt = \int_0^\infty \lim_{x\to 0} \frac{t^N e^{-t}}{1+tx}\, dt = \int_0^\infty t^N e^{-t}\, dt = N!$$

Stoga,

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} n!(-x)^n \right) + O(x^N) \quad \text{kada} \quad x \to 0$$

odnosno

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} n!(-x)^n \right) + o(x^{N-1}) \quad \text{kada} \quad x \to 0$$

Preostaje osjetljivo pitanje *optimalne* duljine parcijalnog reda s kojim aproksimiramo promatranu funkciju. U našem slučaju ostatak je približno reda $N!x^N$, dok je posljednji član u sumi reda $(N-1)!x^{N-1}$. To znači kako će procjenjena pogreška biti veća od posljednjeg pribrojenog člana onda kada je $N > 1/x$. Drugim riječima, za dani x optimalan broj članova reda dan je s $N_{\max} \approx 1/x$.

§ 3.3 Asimptotski razvoji

Definicija 3.3. Neka je $O \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, te $(\phi_n)_n$ niz funkcija $\phi_n : O \to \mathbb{R}$, takvih da je $\phi_n(x) \neq 0$ za sve $x \in O$. Kažemo da je (ϕ_n) **asimptotski niz** funkcija oko $a \in O$ ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x)) \tag{3.5}$$

kada $x \to a$.

Definicija 3.4. Neka je $O \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, te (ϕ_n) asimptotski niz funkcija $\phi_n : O \to \mathbb{R}$. **Asimptotski razvoj** funkcije $f : S \to \mathbb{R}$ za $x \to a \in S$ je formalna (konvergentna ili divergentna) suma $\sum_n a_n \phi_n(x)$ s konstantama $a_n \in \mathbb{R}$, takva da za sve $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x) + o(\phi_N(x)) \tag{3.6}$$

kada $x \to a$. Ako funkcija f posjeduje asimptotski razvoj, tada pišemo

$$f(x) \sim \sum_n a_n \phi_n(x)$$

i kažemo da je funkcija f *asimptotski jednaka* navedenom redu.

Moguće su različite situacije: asimptotski red može konvergirati k funkciji f, može konvergirati k nekoj drugoj funkciji $g \neq f$ ili može divergirati.

Promotrimo sada razvoj integrala oblika

$$I(x) = \int_a^b e^{-xf(t)} g(t)\, dt \tag{3.7}$$

gdje je $x > 0$. Što je x veći broj, to u ukupnoj vrijednosti gornjeg integrala više doprinosi oni dijelovi podintegralne funkcije koji su u okolini globalnog minimuma funkcije f. Zanimljiva su dva slučaja, onda kada funkcija f ima globalni minimum na rubovima integracijskog intervala, te onda kada je globalni minimum negdje unutar otvorenog intervala $\langle a, b\rangle$.

Lema 3.5. (**Watson**) *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi*

a) $f(x) = O(e^{ax})$ kada $x \to \infty$ za neku konstantu $a \in \mathbb{R}$, te

b) postoji monotono rastući niz realnih konstanti $(\alpha_n)_n$, gdje je $\alpha_0 > -1$, takav da vrijedi

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\alpha_n} \quad \textit{kada} \quad x \to 0^+$$

Tada je

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \Gamma(\alpha_n + 1)}{x^{\alpha_n+1}} \tag{3.8}$$

kada $x \to \infty$.

Dokaz : Iz pretpostavke a) slijedi kako postoje konstante $K, M > 0$, takve da je $|f(t)| \leq Ke^{at}$ za sve $t > M$. Podjelimo stoga integral $I(x)$ na sljedeći način,

$$I(x) = \int_0^M e^{-xt} f(t)\, dt + \int_M^\infty e^{-xt} f(t)\, dt \equiv I_1(x) + I_2(x)$$

Tada je

$$|I_2(x)| \leq \int_M^\infty e^{-xt}|f(t)|\,dt \leq \frac{K}{x-a}\,e^{(a-x)t}\Big|_M^\infty = \frac{K}{a-x}\,e^{-(x-a)M} = o(e^{-xM})$$

kada $x \to \infty$ (kod izvrjednjavanja integrala smo iskoristili nejednakost $x > a$). Nadalje, po pretpostavci b) za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n t^{\alpha_n} + g_N(t)\,,$$

gdje je $g_N(t) = o(t^{\alpha_N})$ kada $t \to 0^+$, pa integral $I_1(x)$ možemo rastaviti prema

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \int_0^M t^{\alpha_n} e^{-xt}\,dt + \int_0^M g_N(t)e^{-xt}\,dt$$

Kako za svaki $M > 0$ postoji $b > 0$, takav da za sve $t > M$ vrijedi $t^{\alpha_n} < Me^{bt}$, koristeći nejednakost koju smo već dokazali za integral $I_2(x)$, imamo

$$\int_0^M t^{\alpha_n} e^{-xt}\,dt = \int_0^\infty t^{\alpha_n} e^{-xt}\,dt - \int_M^\infty t^{\alpha_n} e^{-xt}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{x^{\alpha_n+1}} + o(e^{-xM})$$

Preostaje još dokazati

$$\int_0^M g_N(t)e^{-xt}\,dt = o(\gamma_N)\,, \quad \gamma_N = \frac{\Gamma(\alpha_N+1)}{x^{\alpha_N+1}}$$

□

Minimum na rubu intervala. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti kako je globalni minimum u $t = a = 0$. U razmatranju ćemo se ograničiti na slučaj kada je $f'(0) \neq 0$, odnosno $f'(0) > 0$. U vrijednosti integrala dominira doprinos unutar intervala $[0, x^{-1}]$ i ovdje razvijamo funkcije f i g,

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2!}\,f''(0)t^2 + \dots$$

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2!}\,g''(0)t^2 + \dots$$

$$e^{-xf(t)} = e^{-xf(0)-xf'(0)t}\exp\left(-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{xf^{(n)}(0)}{n!}\,t^n\right) =$$

$$= e^{-xf(0)-xf'(0)t}\left(1 - \frac{xf''(0)}{2!}\,t^2 - \frac{xf'''(0)}{3!}\,t^3 + \dots\right)$$

$$I(x) = e^{-xf(0)}\int_0^b e^{-xf'(0)t}\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots\right)dt$$

gdje koeficijente računamo množenjem razvoja gornje eksponencijalne funkcije i funkcije g. Zamjena gornje granice b s ∞ uz veliki x unosi eksponencijalno potisnutu pogrešku u rezultat. Na kraju, koristeći Watsonovu lemu, integriramo dobiveni razvoj član po član. Koristeći

$$\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}\,dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \tag{3.9}$$

imamo

$$I(x) \sim \frac{e^{-xf(0)}}{xf'(0)} \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, c_n}{(xf'(0))^n} \right) \tag{3.10}$$

Napomena: slučaj $f'(0) = 0$ zahtijeva zasebno razmatranje.

Primjer: eror funkcija i komplementarna eror funkcija,

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\, ds \tag{3.11}$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-s^2}\, ds \tag{3.12}$$

Zamjena varijable, $t = (s/x)^2 - 1$

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{\sqrt{1+t}}\, dt$$

Ovdje je $f(t) = t$ (na intervalu $[0, \infty\rangle$ ima globalni minimum u $t = 0$), te $g(t) = 1/\sqrt{1+t}$. Koristeći razvoj funkcije g oko $t = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\, t^n$$

i integral

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-x^2 t}\, dt = \frac{n!}{x^{2(n+1)}}$$

dobivamo asimptotski razvoj

$$\mathrm{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n x^{2n}} \right) =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} - \frac{15}{8x^6} + \ldots \right) \tag{3.13}$$

Minimum unutar intervala. Bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo kako je minimum u $t = 0$ (gdje je $0 \in \langle a, b\rangle$). Kako je $f'(0) = 0$ imamo

$$f(t) = f(0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f''(0)}{n!}\, t^n \;, \quad f''(0) > 0$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, t^n$$

$$I(x) = e^{-xf(0)} \int_a^b e^{-xf''(0)t^2/2} \left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots \right) dt$$

Zamjene $a \to -\infty$ i $b \to \infty$ uz veliki x unose eksponencijalno potisnutu grešku u rezultat. Koristeći

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\lambda t^2}\, dt = \frac{\Gamma((2n+1)/2)}{\lambda^{(2n+1)/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, \frac{(2n-1)!!}{(2\lambda)^n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} e^{-\lambda t^2}\, dt = 0$$

$$I(x) \sim \sqrt{2\pi}\, \frac{e^{-xf(0)}}{\sqrt{xf''(0)}} \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, c_{2n}}{(xf''(0))^n} \right) \tag{3.14}$$

Napomena: slučaj $f''(0) = 0$ zahtijeva zasebno razmatranje.

Primjer: **Stirlingova formula**.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} s^x e^{-s}\, ds = \int_0^{\infty} e^{-s + x\ln s}\, ds$$

Koristimo zamjenu varijable $s = (t+1)x$, kako bismo u eksponentu dobili argument oblika x puta neka funkcija,

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{\infty} e^{-x(t - \ln(t+1))}\, dt$$

Globalni minimum funkcije $f(t) = t - \ln(t+1)$ je $f(0) = 0$ uz $f''(0) = 1$.

$$f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, t^n$$

$$e^{-xf(t)} = e^{-xt^2/2} \Bigg(1 + \left(\frac{x}{3}\, t^3 - \frac{x}{4}\, t^4 + \frac{x}{5}\, t^5 - \frac{x}{6}\, t^6 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{3^2}\, t^6 + \frac{x^2}{4^2}\, t^8 + 2\, \frac{x^2}{3 \cdot 5}\, t^8 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{x^3}{3^3}\, t^9 - 3\, \frac{x^3}{3^2 \cdot 4}\, t^{10} + \dots \right) + \frac{1}{4!} \left(\frac{x^4}{3^4}\, t^{12} + \dots \right) + \dots \Bigg)$$

Koristeći integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{x}{2} t^2}\, dt = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, \frac{(2n-1)!!}{x^n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} e^{-\frac{x}{2} t^2}\, dt = 0$$

imamo asimptotski razvoj

$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots \right) \tag{3.15}$$

U najnižoj aproksimaciji,

$$n! \approx \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Zadatak: izračunajte srednju vrijednost funkcije $\sin^{100}(x)$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

4

Obične diferencijalne jednadžbe

Fizikalne pojave su opisane funkcijama koje nam govore kako se opservable mijenjaju u vremenu, prostoru i s obzirom na neke druge parametre promatranog sustava. To znači da će jednadžbe kojima će biti povezane takve funkcije i njihove promjene redovito sadržavati derivacije. Jednadžbe u kojima se nepoznata funkcija ili funkcije pojavljuju derivirano općenito zovemo **diferencijalnim jednadžbama**. Na primjer,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

Postoji mnogo načina na koje možemo podijeliti diferencijalne jednadžbe. Za početak, ako gledamo broj varijabli o kojima ovise nepoznate funkcije, tada diferencijalne jednadžbe dijelimo na **obične** (kada se pojavljuju derivacije samo po jednoj varijabli) i **parcijalne** (kada se pojavljuju parcijalne derivacije po više varijabli). U ovom poglavlju ćemo se baviti običnim diferencijalni jednadžbama, a parcijalne odgađamo za kasnije poglavlje.

Ansatz je *pogođen* oblik rješenja nekog problema, konzistentan s poznatim činjenicama ili pretpostavkama.

§ 4.1 Klasifikacija ODJ

Definicija 4.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ otvoren skup i $F : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. **Obična diferencijalna jednadžba** (ODJ) n-tog **reda** je jednadžba oblika

$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \tag{4.1}$$

Opće rješenje ODJ je familija svih onih funkcija $y : I \to \mathbb{R}$ klase C^n, definiranih na nekom intervalu $I = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$, koje za sve $x \in I$ zadovoljavaju

(a) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \Omega$, te

(b) jednadžbu (4.1).

Početni uvjeti ODJ su vrijednosti funkcije y i njenih derivacija u nekoj točki $x_0 \in I$ ("početnom trenutku"),

$$y^{(k)}(x_0) = \alpha_k \ , \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \tag{4.2}$$

Jednadžbu (4.1) s početnim uvjetima (4.2) zovemo **Cauchyjeva zadaća**. **Partikularno rješenje** je član općeg rješenja koje zadovoljava zadane početne uvjete.

Napomena: sve ove definicije imaju prirodno poopćenje na kompleksne funkcije zamjenom $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Po definiciji je red obične diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije u jednadžbi. Na primjer, jednadžbe

$$(y')^3 + 5y = 0 \ , \quad e^{y''} + y' = 0 \ , \quad y''' + y' - y = 0$$

su, redom, 1., 2. i 3. reda. Kada želimo opisati više nepoznatih funkcija koje ovise o jednoj varijabli, tada ćemo općenito imati **sustav** običnih diferencijalnih jednadžbi.

Komentar 4.2. Pogrešno je očekivati kako ODJ n-tog reda *općenito* ima n linearno nezavisnih rješenja, a opće rješenje je zadano pomoću n parametara. Imamo niz protuprimjera,

- ODJ 1. reda $xy' = 1$ nema rješenja na intervalu koji obuhvaća točku $x = 0$ (formalno, rješenje je $y(x) = \ln|x| + C$)
- ODJ 2. reda $(y'')^2 + y^2 = 0$ ima samo jedno rješenje, $y = 0$ (jednadžba je suma dvije pozitivno semidefinitne veličine)
- ODJ 1. reda $(y' - y)(y' - 2y) = 0$ ima 2 linearno nezavisna rješenja $y_1 = C_1 e^x$ i $y_2 = C_2 e^{2x}$

//

Komentar 4.3. Primjer

$$xy' = 2(y-1)\ , \qquad \frac{y'}{y-1} = \frac{2}{x}\ , \qquad \ln(y-1) = 2\ln x + C$$

$$y = Ax^2 + 1$$

Ako zadamo početni uvjet $y(0) = 1$, nismo puno rekli jer sva rješenja zadovoljavaju taj uvjet! //

Definicija 4.4. Za ODJ kažemo da je **linearna** ako je oblika $L_x[y] = f$, gdje je L_x linearni diferencijalni operator na prostoru funkcija,

$$L_x = A_n(x)\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + A_{n-1}(x)\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + A_1(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + A_0(x)$$

Za diferencijalne jednadžbe koje nisu linearne kažemo da su **nelinearne**. Za linearne ODJ oblika $L[y] = 0$ kažemo da su **homogene** diferencijalne jednadžbe. **Singularna točka** je ona u kojoj iščezava funkcija uz vodeću derivaciju.

U daljnjoj diskusiji ćemo pretpostaviti kako je linearni diferencijalni operator sveden na "standardni oblik",

$$L_x = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x)$$

a sa singularnim točkama ćemo se posebno baviti. Na primjer, gušeni harmonički oscilator je opisan linearnim operatorom

$$L_t^{\mathrm{ho}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2b\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2$$

Rješenja homogenih linearnih ODJ zadovoljavaju tzv. **princip superpozicije**: ako su y_1 i y_2 rješenja linearne ODJ $L[y] = 0$, tada je rješenje i svaka linearna kombinacija $\alpha y_1 + \beta y_2$ s konstantnim koeficijentima α, β jer vrijedi

$$L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2] = 0 + 0 = 0$$

Svaki član općeg rješenja linearne ODJ je funkcija oblika $y = y_p + y_h$, gdje je y_h član općeg rješenja pripadne homogene ODJ. Naime,

$$L[y_p + y_h] = L[y_p] + L[y_h] = f + 0 = f$$

Obratno, ako je y rješenje linearne ODJ, te y_p neko njeno partikularno rješenje, tada vrijedi

$$L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = f - f = 0$$

Drugim riječima, $y - y_p$ je rješenje pripadne homogene ODJ.

Metode rješavanja,

- separacija varijabli kod nekih ODJ prvog reda, kada jednadžbu dovodimo u oblik
$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$$
odakle je integracija načelno direktno izvediva, te je rješenje općenito zadano u implicitnom obliku.
- metoda varijacija konstanti (pronađemo rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe, potom kao ansatz za partikularno rješenje koristimo dobivenu funkciju u kojoj su konstante "promovirane" u nove nepoznate funkcije koje tražimo vraćanjem u diferencijalnu jednadžbu)
- metoda neodređenih koeficijenata
- Greenove funkcije (nehomogenost rastavimo kako superpoziciju strogo lokaliziranih smetnji, pa na kraju prointegriramo njihove doprinose; detalje iznosimo u kasnijem zasebnom poglavlju)
- aproksimativne, numeričke metode (njih ovdje nećemo obrađivati)

Komentar 4.5. Svako "rješenje" dobiveno nekom metodom uvijek treba uvrstiti natrag u početnu jednadžbu i provjeriti da li ono uistinu rješava zadanu jednadžbu. Na primjer, ako jednadžbu
$$\sqrt{x^2-3} = 5-3x$$
rješimo uobičajenim postupkom kvadriranja dobit ćemo $x_1 = 2$ i $x_2 = 7/4$, ali ona nisu rješenja! Razlog tome je što desna strana za ove x_1 i x_2 daje negativne vrijednosti, dok je korijen po definiciji nenegativan. Geometrijski, hiperbola na lijevoj strani i pravac na desnoj se sijeku ispod osi apscise. //

Integralna krivulja ODJ prvog reda oblika
$$y' = F(x,y)\ , \quad \mathrm{tg}\,\alpha = F(x_0,y_0)$$

§ 4.2 Linearne ODJ prvog reda

Općenita linearna ODJ prvog reda je oblika
$$A(x)y'(x) + B(x)y(x) = C(x) \tag{4.3}$$
Pretpostavimo $A(x) \neq 0$ i podijelimo s $A(x)$
$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \tag{4.4}$$
Pronaći ćemo rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y_h(x)$, potom jedno partikularno rješenje $y_p(x)$, odakle ćemo imati ukupno rješenje $y(x)$. Rješenje homogene,
$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{y'}{y} = -f$$

Integriranjem

$$\ln y(x) - \ln y(x_0) = -\int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s$$

$$y_h(x) = A\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s\right) \tag{4.6}$$

Partikularno: metodom varijacije konstante

$$y_p(x) = A(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s\right) \tag{4.7}$$

$$y' + fy = (A' - Af)e^{-\int f} + fAe^{-\int f} = A'e^{-\int f} = g$$

$$A' = g\,e^{\int f}$$

Integriranjem dobivamo

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s\,g(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) \tag{4.8}$$

Odavde imamo

$$y(x) = \left(A + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s\,g(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Kako je $y(x_0) = A$, možemo ukupno rješenje zapisati u obliku

$$y(x) = \left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s\,g(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} d\sigma\,f(\sigma)\right)\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s\,f(s)\right) \tag{4.9}$$

Komentar 4.6. Neki autori pišu ovo formalno rješenje izostavljajući donju granicu u integralima, x_0. Označimo li s F primitivnu funkciju funkcije f, tad gornji izraz možemo zapisati u obliku

$$y(x) = \left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s\,g(s)\,e^{F(s)-F(x_0)}\right)e^{F(x_0)-F(x)} =$$

$$= \left(y(x_0)e^{F(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s\,g(s)\,e^{F(s)}\right)e^{-F(x)} =$$

$$= \left(B + \int^{x} \mathrm{d}s\,g(s)\,e^{\int^{s}\mathrm{d}\sigma\,f(\sigma)}\right)e^{-\int^{x}\mathrm{d}s\,f(s)}$$

Iz ovog zapisa je jasno kako promjena donje granice (x_0) u integralima, samo mijenja slobodnu konstantu B u konačnom rješenju. //

Primjer: R-L krug

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = \mathcal{E}(t)\,, \quad I(0) = I_0$$

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}\,I(t) = \frac{1}{L}\,\mathcal{E}(t)$$

$$I(t) = e^{-Rt/L} \left(I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t \mathcal{E}(s) e^{Rs/L} \, \mathrm{d}s \right)$$

Jednom kada smo dobili rješenje ODJ, možemo se pitati koliko je to rješenje *jedinstveno*? Primjer nelinearne ODJ prvog reda kada to nije slučaj,

$$y'(x) = y^{2/3} \,, \quad y(0) = 0 \tag{4.10}$$

ima dva rješenja,

$$y_1(x) = 0 \,, \quad y_2(x) = (x/3)^3$$

Definicija 4.7. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$

- **globalno Lipschitzova** ako postoji konstanta $K > 0$, takav da za sve $x_1, x_2 \in \Omega$ vrijedi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K|x_2 - x_1|$$

- **lokalno Lipschitzova u točki** $a \in \Omega$ ako postoji otvorena kugla $B(a, r) \subseteq \Omega$ i konstanta $K(a) > 0$, takav da za sve $x_1, x_2 \in B(a, r)$ vrijedi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K(a)|x_2 - x_1|$$

Za funkciju f kažemo da je **lokalno Lipschitzova** ako je lokalno Lipschitzova u svakoj točki skupa Ω.

Iz definicije odmah vidimo da je globalno Lipschitzova funkcija nužno i lokalno Lipschitzova, ali obrat ne mora nužno vrijediti (uskoro ćemo vidjeti primjere). Slikovito, Lipschitzove funkcije imaju "ograničen rast".

Teorem 4.8. *Ako je funkcija klase C^1, tada je nužno lokalno Lipschitzova. Ako je funkcija lokalno Lipschitzova, tada je nužno klase C^0.*

Dokaz : Pretpostavimo da je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. Promotrimo točku a i otvorenu kuglu $B(a, r) = \langle a - r, a + r \rangle \subseteq \Omega$, takvu da je $I = [a - r, a + r] \subseteq \Omega$. Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za svaki par točaka $x_1, x_2 \in B(a, r)$ takvih da je $x_2 > x_1$ postoji $c \in \langle x_1, x_2 \rangle$ sa svojstvom

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$$

pa je

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)| \cdot |x_2 - x_1| \le K(a)|x_2 - x_1|$$

gdje je

$$K = \max_{x \in I} |f'(x)| < \infty$$

Naime, derivacija f' je po pretpostavi neprekidna funkcija, a kako je I kompaktan skup, njene vrijednosti su na njemu omeđene odozgo. Dakle, funkcija f je lokalno Lipschitzova u proizvoljnoj točki skupa Ω.

Pretpostavimo da je funkcija lokalno Lipschitzova u točki $a \in \Omega$. Tada postoji otvorena kugla $B(a,r) = \langle a-r, a+r\rangle$, takva da za sve $x_1, x_2 \in B(a,r)$ vrijedi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K(a)|x_2 - x_1|$$

To znači da za svaki $\epsilon > 0$ možemo odabrati $\delta = \epsilon/K(a)$, tako da $|x_2 - x_1| < \delta$ povlači

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K(a)|x_2 - x_1| < K(a)\delta = \epsilon$$

pa je funkcija f neprekidna na otvorenoj kugli $B(a,r)$. Kako ovo vrijedi za sve $a \in S$, slijedi da je f neprekidna na S. □

Primjeri:

- $f(x) = |x|$ je globalno Lipschitzova funkcija, ali nije klase C^1 (nije derivabilna u $x = 0$). Naime, koristeći nejednakost trokuta imamo

  $$|f(x_2) - f(x_1)| = \big||x_2| - |x_1|\big| \leq |x_2 - x_1|$$

  pa je $K = 1$.

- $g(x) = x^2$ je klase C^1 i stoga lokalno Lipschitzova, ali ipak nije globalno Lipschitzova funkcija. Naime,

  $$|g(x_2) - g(x_1)| = |x_2^2 - x_1^2| = |x_2 + x_1| \cdot |x_2 - x_1|$$

  Međutim, izraz $|x_2 + x_1|$ *nije omeđen* odozgo za $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

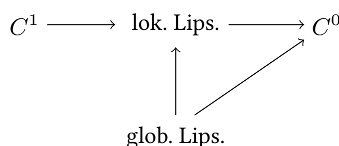
- $h(x) = x^{2/3}$ je C^0, ali nije lokalno Lipschitzova na intervalu koji uključuje $x = 0$. Naime,

  $$|h(x) - h(0)| = |x^{2/3} - 0| = |x^{-1/3}| \cdot |x - 0|$$

  Međutim, izraz $|x^{-1/3}|$ *nije omeđen* odozgo kada $x \to 0$.

Komentar 4.9. Jedan tehnički detalj: ako je neka funkcija f lokalno Lipschitzova na zatvorenom intervalu $[a,b]$, tada je ona nužno i globalno Lipschitzova na tom intervalu. Naime, za svaku točku $x \in [a,b]$ postoji okolina O_x i konstanta $K(x)$ s obzirom na koju funkcija f zadovoljava Lipschitzovo svojstvo. Familija otvorenih skupova $\{O_x\}$ "prekriva" interval $[a,b]$ (preciznije, njihova unija sadrži $[a,b]$). Nadalje, zatvoren interval je kompaktan, iz čega sljedi kako je moguće odabrati *konačno* mnogo skupova iz te familije, a onda među njima pripadnim konstantama $K(x)$ maksimalnu $K_{\max}$ (ovu konstantu koristimo pri provjeri globalnog Lipschitzovog svojstva). //

Shematski prikaz implikacija



Lema 4.10. **(Grönwall)** *Neka je $I = [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ i $g : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako g zadovoljava nejednakost*

$$0 \le g(t) \le C + K \int_{t_0}^{t} g(s)\, \mathrm{d}s \tag{4.11}$$

za sve $t \in I$ i neke konstantne $K \ge 0$, $C \ge 0$, tada vrijedi

$$0 \le g(t) \le Ce^{K(t-t_0)} \tag{4.12}$$

za sve $t \in I$. Specijalno, ako je $C = 0$, tada iz pretpostavki leme slijedi $g(t) = 0$ za sve $t \in I$.

DOKAZ : Neka je

$$G(t) \equiv C + K \int_{t_0}^{t} g(s)\, \mathrm{d}s$$

Tada po pretpostavci leme vrijedi $0 \le g(t) \le G(t)$ za sve $t \in I$. Nadalje, imamo

$$G'(t) = Kg(t) \le KG(t)$$

$$G'(t) - KG(t) \le 0$$

Množenjem s e^{-Kt},

$$G'(t)e^{-Kt} - KG(t)e^{-Kt} \le 0$$
$$\big(G(t)e^{-Kt}\big)' \le 0$$

Odavde slijedi

$$G(t)e^{-Kt} \le G(t_0)e^{-Kt_0} = Ce^{-Kt_0}$$

odnosno

$$g(t) \le G(t) \le Ce^{K(t-t_0)}$$

□

Ovdje ćemo dokazati jedinstvenost ODJ prvog reda specifičnog oblika (koji uključuje sve linearne ODJ prvog reda).

Komentar 4.11. Kada za neku funkciju $f(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je globalno Lipschitzova *po drugoj varijabli*, eksplicitno to znači da postoji pozitivna realna konstanta $K > 0$, takva da za sve parove $(x, y), (x, z) \in \Omega$ vrijedi

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le K|y - z|$$

s fiksnim x, s napomenom kako je konstanta K ista za sve x. //

Teorem 4.12. **(Jedinstvenost rješenja ODJ prvog reda)** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je (lokalno) Lipschitzova funkcija po drugoj varijabli. Tada problem*

$$y'(x) = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.13}$$

ima jedinstveno rješenje.

DOKAZ : Pretpostavimo da postoje dva rješenja ove ODJ s početnim uvjetom, $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Tada za svako od njih vrijedi

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_i(s))\, \mathrm{d}s\ , \quad i = 1, 2$$

Koristeći Lipschitzovo svojstvo vidimo kako za svaki $x \geq x_0$ vrijedi

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \big)\, \mathrm{d}s \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \big| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \big|\, \mathrm{d}s \leq \\ &\leq \int_{x_0}^{x} K |y_1(s) - y_2(s)|\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Upotrijebimo li sada Grönwallovu lemu 4.10 za funkciju $g(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$, slijedi $g(x) = 0$ za sve $x \geq x_0$. Sličan argument se može upotrijebiti za $x \leq x_0$. □

§ 4.3 Linearne ODJ višeg reda

Promotrimo za početak linearnu ODJ drugog reda

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x) \tag{4.14}$$

Ograničit ćemo se na regularne točke, $A(x) \neq 0$, pa dijeljenjem s $A(x)$

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x) \tag{4.15}$$

Korištenjem pomoćnog operatora,

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{4.16}$$

pripadni linearni diferencijalni operator možemo pisati u obliku

$$L = D^2 + P(x)D + Q(x) \tag{4.17}$$

Wronskijan

$$W[f, g](x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x) \tag{4.18}$$

Promotrimo sada Wronskijan dva rješenja homogene ODJ

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

u_1 i u_2, $W[u_1, u_2] = u_1 u_2' - u_2 u_1'$. Derivacija Wronskijana je

$$\frac{dW}{\mathrm{d}x} = u_1' u_2' + u_1 u_2'' - (u_2' u_1' + u_2 u_1'') = u_1 u_2'' - u_2 u_1'' =$$

$$= u_1(-Pu_2' - Qy_2) - u_2(-Pu_1' - Qu_1) = -PW$$

Drugim riječima, Wronskijan zadovoljava linearnu ODJ prvog reda,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + PW = 0 \tag{4.19}$$

čije rješenje znamo formalno zapisati (tzv. **Abelov identitet**),

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(s)\,\mathrm{d}s\right) \tag{4.20}$$

Pretpostavimo da nam je poznato jedno rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe, $u_1(x)$. Tada možemo dobiti i drugo linearno nezavisno rješenje na sljedeći način,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{u_1u_2' - u_2u_1'}{u_1^2} = \frac{W[u_1,u_2]}{u_1^2}$$

Integriranjem slijedi

$$u_2(x) = \left(C + \int_{x_0}^{x} \frac{W(s)}{u_1(s)^2}\,\mathrm{d}s\right) u_1(x)\ ,$$

Pri čemu je C nebitna integracijska konstanta (na kraju rješenje homogene ODJ ionako pišemo kao linearnu kombinaciju funkcija u_1 i u_2) pa možemo radi jednostavnosti zapisa odabrati $C = 0$.

Pretpostavimo sada da su nam poznata oba rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe, $u_1(x)$ i $u_2(x)$. Metodom varijacije konstanti pretpostavljamo ansatz za partikularno rješenje oblika

$$y(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) \tag{4.21}$$

$$y' = C_1'u_1 + C_1u_1' + C_2'u_2 + C_2u_2'$$

Dodatni zahtjev,

$$C_1'u_1 + C_2'u_2 = 0 \tag{4.22}$$

Nadalje,

$$y'' = C_1'u_1' + C_1u_1'' + C_2'u_2' + C_2u_2''$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo

$$C_1'u_1' + C_1u_1'' + C_2'u_2' + C_2u_2'' + P(C_1u_1' + C_2u_2') + Q(C_1u_1 + C_2u_2) = R$$

$$(C_1'u_1' + C_2'u_2') + C_1L[u_1] + C_2L[u_2] = R$$

Kako su u_1 i u_2 po pretpostavci rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe, slijedi

$$C_1'u_1' + C_2'u_2' = R \tag{4.23}$$

Rješenje sustava jednadžbi (4.22) i (4.23) dan je s

$$C_1' = -\frac{u_2}{W[u_1,u_2]}\,R\ , \quad C_2' = \frac{u_1}{W[u_1,u_2]}\,R$$

Integriranjem slijedi

$$C_1(x) = -\int^x \frac{u_2(s)}{W(s)}\, R(s)\, ds \;, \quad C_2(x) = \int^x \frac{u_1(s)}{W(s)}\, R(s)\, ds \tag{4.24}$$

Ovdje je odabir donjih granica integrala irelevantan jer se njihovom promjenom samo mijenjaju koeficijenti uz rješenja homogene diferencijalne jednadžbe. Time smo formalno pronašli ukupno rješenje linearne ODJ drugog reda,

$$y(x) = Au_1(x) + Bu_2(x) + C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) \;, \tag{4.25}$$

gdje su A i B konstante koje valja odrediti iz početnih uvjeta. Zanimljivo je uočiti kako je dovoljno poznavanje samo jednog rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe kako bismo pronašli ostatak ukupnog rješenja!

Sada ćemo razmotriti linearne ODJ općenitog višeg reda. Wronskijan skupa funkcija $\{f_1, \dots, f_n\}$ je definiran determinantom

$$W[f_1, \dots, f_n](x) \equiv \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.26}$$

Gore opisan postupak, metodu varijacije konstanti primjenjenu na rješavanje nehomogene ODJ 2. reda, možemo poopćiti na ODJ općenitog n-tog reda.

$$L[y] = f \;, \quad L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

Neka su $\{u_1, \dots, u_n\}$ rješenja pripadne homogene ODJ, $L[u_i] = 0$. Potražimo rješenje nehomogene ODJ u obliku ansatza

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) u_i(x)$$

s nekim funkcijama $C_i(x)$ koje trebamo pronaći. Imamo redom

$$y' = \sum_{i=1}^{n} (C_i' u_i + C_i u_i') \;, \quad \text{pretpostavimo: } \sum_{i=1}^{n} C_i' u_i = 0$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} (C_i' u_i' + C_i u_i'') \;, \quad \text{pretpostavimo: } \sum_{i=1}^{n} C_i' u_i' = 0$$

itd.

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} (C_i' u_i^{(n-2)} + C_i u_i^{(n-1)}) \;, \quad \text{pretpostavimo: } \sum_{i=1}^{n} C_i' u_i^{(n-2)} = 0$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (C_i' u_i^{(n-1)} + C_i u_i^{(n)})$$

Upotrebom ovih izraza dobivamo

$$f = L[y] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[u_i] + \sum_{i=1}^{n} C_i' u_i^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i' u_i^{(n-1)}$$

Sve skupa, imamo linearni sustav

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

s rješenjima

$$C_i' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_{i+1} & \cdots & u_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \cdots & u_{i-1}^{(n-1)} & f & u_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+i} \frac{f}{W} \begin{vmatrix} u_1 & \cdots & u_{i-1} & u_{i+1} & \cdots & u_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-2)} & \cdots & u_{i-1}^{(n-2)} & u_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

gdje je $W = W[u_1, \ldots, u_n]$. Odavde integriranjem dobivamo formalan izraz za funkcije $C_i(x)$.

U narednim teoremima ćemo ispitati neka važnija svojstva Wronskijana, te poopćiti formulu (4.20).

Teorem 4.13. *Ako su funkcije $\{f_1, \ldots, f_n\}$ klase C^{n-1} linearno zavisne na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, tada je $W(x) = 0$ za sve $x \in I$.*

Dokaz : Po pretpostavci su funkcije $\{f_1, \ldots, f_n\}$ linearno zavisne na intervalu I pa postoje konstante $\{c_1, \ldots, c_n\}$ među kojima je barem jedna različita od nula (možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti $c_1 \neq 0$), takve da je

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

za sve $x \in I$. Dijeljenjem s c_1 imamo alternativni zapis

$$f_1(x) = -\sum_{k=2}^{n} \frac{c_k}{c_1} f_k(x) \; .$$

Uzastopnim deriviranjem dobivamo analognu vezu među višim derivacijama,

$$f_1^{(l)}(x) = -\sum_{k=2}^{n} \frac{c_k}{c_1} f_k^{(l)}(x) \; , \quad l \in \{1, \ldots, n-1\}$$

pa je prvi stupac u W linearna kombinacija ostalih stupaca u W, odakle slijedi $W(x) = 0$ za sve $x \in I$. □

Kao posljedicu teorema imamo jedan test linearne nezavisnosti funkcija: dovoljno je provjeriti da li na promatranom intervalu Wronskijan ne iščezava. Međutim, obrat teorema općenito ne vrijedi: ako je Wronskijan identički nula, promatrane funkcije ne moraju biti linearno zavisne. Promotrimo dva naredna primjera:

a) (Peanov primjer) funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x|x|$ su linearno nezavisne na svakoj okolini točke $x = 0$, te vrijedi

$$W[f,g](x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0$$

b) funkcije $f_1, f_2, f_3 : I = [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = 3 + x^3$,

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 + x^3\,, & x \le 0 \\ 1\,, & x \ge 0 \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1\,, & x \le 0 \\ 1 + x^3\,, & x \ge 0 \end{cases}$$

imaju $W[f_1, f_2, f_3](x) = 0$ za sve $x \in I$, ali su linearno nezavisne funkcije na intervalu I.

Poanta je u tome kako ne postoji takva ODJ kojoj bi promatrane funkcije bila rješenja (uskoro ćemo vidjeti zašto je to presudno).

Teorem 4.14. *Neka su* $\{y_1, \dots, y_n\}$ *rješenja jednadžbe*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x) y(x) = 0 \tag{4.27}$$

gdje su $a_k(x)$ *neprekidne na* $I \subseteq \mathbb{R}$*, te* $W \equiv W[y_1, \dots, y_n]$ *pripadni Wronskijan. Tada za sve* $x \in I$ *vrijedi*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\, ds \right) \tag{4.28}$$

Dokaz : Deriviranje determinanti,

$$\begin{vmatrix} f & g \\ h & k \end{vmatrix}' = (fk - gh)' = f'k + fk' - (g'h + gh') = (f'k - g'h) + (fk' - gh') =$$

$$= \begin{vmatrix} f' & g' \\ h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g \\ h' & k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & g \\ h' & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g' \\ h & k' \end{vmatrix}$$

i analogno za matrice većeg reda. Promotrimo sada Wronskijan

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Primjetimo prvo kako svi članovi osim posljednjeg iščezavaju. Nadalje, derivacije funkcija u posljednjem redu preostalog člana možemo zapisati pomoću pripadne diferencijalne jednadžbe,

$$y_k^{(n)} = -a_{n-1} y_k^{(n-1)} - a_{n-2} y_k^{(n-2)} - \cdots - a_0 y_k$$

Dobivenu determinantu možemo rastaviti narednim postupkom: označimo li s Δ_{ij} minoru promatrane matrice (determinantu matrice koja se dobije izbacivanjem i-tog retka i j-tog stupca) pomnoženu s pripadnim faktorom $(-1)^{i+j}$, tada općenito imamo

$$\begin{vmatrix} \alpha x_{11} + \beta y_{11} & \alpha x_{12} + \beta y_{12} & \dots & \alpha x_{1n} + \beta y_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha x_{11} + \beta y_{11})\Delta_{11} + (\alpha x_{12} + \beta y_{12})\Delta_{12} + \dots + (\alpha x_{1n} + \beta y_{1n})\Delta_{1n} = \\ &= \alpha(x_{11}\Delta_{11} + \dots + x_{1n}\Delta_{1n}) + \beta(y_{11}\Delta_{11} + \dots + y_{1n}\Delta_{1n}) = \\ &= \alpha \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ z_{21} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ z_{21} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Stoga,

$$W' = -a_{n-1} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - a_{n-2} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} - \dots$$

Među ovim članovima iščezavaju svi osim prvog (svi ostali sadrže barem dva jednaka reda), pa je

$$W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x)$$

Ovo je linearna ODJ prvog reda i njeno rješenje znamo formalno zapisati,

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\, ds \right)$$

Odavde vidimo kako je Wronskijan ili svugdje ili nigdje jednak nula. □

Naredni teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 4.15. (Egzistencija i jedinstvenost rješenja linearne ODJ višeg reda) *Neka je $n \in \mathbb{N}$, te $\{a_0, \dots, a_{n-1}, R\}$ skup neprekidnih funkcija na intervalu $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Linearna ODJ reda n oblika*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R \tag{4.29}$$

s početnim uvjetima

$$y(x_0) = \gamma_0 \,,\ y'(x_0) = \gamma_1 \,,\ \dots \,,\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1} \tag{4.30}$$

ima rješenje i ono je jedinstveno.

Teorem 4.16. *Skup rješenja linearne homogene ODJ n-tog reda, čiji su koeficijenti neprekidne funkcije, čini vektorski prostor dimenzije n s operacijama zbrajanja i množenja konstantnim funkcijama.*

Dokaz : Skica. Koristeći egzistenciju rješenja upotrijebimo skup rješenja $\{e_1, \dots, e_n\}$ koja zadovoljavaju specijalne početne uvjete u x_0,

$$\begin{pmatrix} e_1(x_0) & \cdots & e_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ e_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & e_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Kako Wronskijan ne iščezava barem u jednoj točki,

$$W[e_1, \dots, e_n](x_0) = 1$$

posrijedi je linearno nezavisan skup n funkcija koje su rješenja promatrane ODJ. Sada ćemo dokazati kako skup funkcija $\{e_1, \dots, e_n\}$ čini bazu svih rješenja promatrane ODJ. Neka je $y(x)$ proizvoljno rješenje promatrane ODJ. Tada je rješenje i linearna kombinacija

$$g(x) = y(x_0)e_1(x) + y'(x_0)e_2(x) + \cdots + y^{(n-1)}(x_0)e_n(x)$$

Zbog svojstava funkcija $\{e_k\}$ vrijedi

$$g(x_0) = y(x_0)\ , \quad g'(x_0) = y'(x_0)\ , \quad \dots\ , \quad g^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0)$$

Dakle, funkcije y i g su obje rješenja iste ODJ s istim početnim uvjetima, pa zbog jedinstvenosti rješenja slijedi $y(x) = g(x)$ u svim točkama $x \in I$. Odave slijedi kako je svako rješenje moguće prikazati na jedinstven način kao linearnu kombinaciju funkcija $\{e_k\}$. □

Sada možemo prokomentirati obrat ranije tvrdnje o Wronskijanu. Neka su

$$\{y_1, \dots, y_n\}$$

rješenja ODJ (4.27) i

$$W[y_1, \dots, y_n](x_0) = 0$$

Neka su $\{c_1, \dots, c_n\}$ konstante zadane sustavom,

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

koji ima netrivijalno rješenje (determinanta sustava je jednaka Wronskijanu, koji je po pretpostavci jednak nula). Funkcija

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

je rješenje iste ODJ, koje zadovoljava početne uvjete definirane gornjim sustavom,

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Međutim, mi već znamo kako trivijalna funkcija $\tilde{y}(x) = 0$ zadovoljava istu ODJ (4.27) i iste početne uvjete, pa je prema teoremu o jedinstvenosti $y(x) = \tilde{y}(x) = 0$ za sve $x \in I$. Ovo povlači kako je za sve $x \in I$

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$$

za neki netrivijalan skup koeficijenata $\{c_1, \ldots, c_n\}$, pa su funkcije $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linearno zavisne na intervalu I.

Homogena ODJ višeg reda s konstantnim koeficijentima. Promotrimo jednostavan slučaj kada su sve funkcije a_k u ODJ konstante,

$$L = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0$$

odnosno

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

Recept: rješavamo pripadnu **karakterističnu jednadžbu**,

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Pretpostavimo da su rješenja ove jednadžbe kompleksni brojevi $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ s pripadnim kratnostima $\{m_1, \ldots, m_r\}$. Tada je jednadžbu moguće faktorizirati,

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_r)^{m_r} = 0\ , \quad \sum_{j=1}^{r} m_j = n$$

Primjetimo, ovo ujedno povlači

$$L = (D - \lambda_1)^{m_1}\cdots(D - \lambda_r)^{m_r}$$

Usputna napomena: primjetite zašto je bilo potrebno pretpostaviti kako su koeficijenti u ODJ konstantni! Time je početni problem "faktoriziran" na elementarne probleme oblika

$$(D - \lambda)^m\, y(x) = 0$$

Promotrimo funkciju oblika $x^p e^{\lambda x}$, gdje je $p \in \mathbb{N}_0$. Imamo

$$(D - \lambda)x^p e^{\lambda x} = p x^{p-1} e^{\lambda x} + \lambda x^p e^{\lambda x} - \lambda x^p e^{\lambda x} = p x^{p-1} e^{\lambda x}$$

Dakle, dok god je $p < m$ vrijedit će

$$(D - \lambda)^m x^p e^{\lambda x} = 0$$

Prema tome, imamo skup rješenja oblika

$$\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x}\}$$

To znači da u našem orginalnom problemu svakom korjenu karakteristične jednadžbe λ_j kratnosti m_j možemo pridružiti skup rješenja oblika

$$\{e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \ldots, x^{m_j - 1} e^{\lambda_j x}\} \tag{4.31}$$

Da li su sve te funkcije linearno nezavisne? Promotrimo za zagrijavanje skup funkcija $\{e^x, e^{2x}, xe^{2x}\}$ i linearnu kombinaciju

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} = 0$$

za koju pretpostavljamo kako vrijedi u svim točkama domene. Ako sada na ovu jednadžbu djelujemo s operatorom $(D-1)(D-2)$ prva dva člana propadnu i preostane nam

$$c_3 e^{2x} = 0$$

odakle slijedi $c_3 = 0$. Iskoristimo li ovu informaciju u početnoj jednadžbi dobivamo

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0$$

Sada djelujemo s operatorom $(D-1)$, čime propadne prvi član, pa slijedi $c_2 = 0$ i konačno $c_1 = 0$. Time smo dokazali kako je promatrani skup funkcija linearno nezavisan. Sada želimo poopćiti ovaj postupak na linearnu kombinaciju

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{p=0}^{m_j-1} c_{jp}\, x^p e^{\lambda_j x} = 0 \tag{4.32}$$

Uočimo prvo

$$(D-\lambda_1)x^p e^{\lambda_2 x} = p x^{p-1} e^{\lambda_2 x} + (\lambda_2 - \lambda_1) x^p e^{\lambda_2 x}$$

Djelujemo li s operatorom (samo smo izostavili jedan faktor $(D-\lambda_r)$ u operatoru L)

$$(D-\lambda_1)^{m_1} \cdots (D-\lambda_{r-1})^{m_{r-1}} (D-\lambda_r)^{m_r-1}$$

na jednadžbu (4.32), dobivamo

$$c_{rm_r}(\lambda_1 - \lambda_r) \cdots (\lambda_{r-1} - \lambda_r)(m_r - 1)!\, e^{\lambda_r x} = 0$$

odakle slijedi $c_{rm_r} = 0$. Zatim na jednadžbu (4.32) djelujemo s operatorom L izostavljajući dva faktora $(D-\lambda_k)$, odakle slijedi $c_{r,m_r-1} = 0$, itd. Ovim postupkom možemo zaključiti kako su sve konstante nula, $c_{jp} = 0$, odnosno kako su promatrane funkcije linearno nezavisne.

Neki primjeri:

- ODJ prvog reda

  $$y'(x) + a_0\, y(x) = 0\,, \quad a_0 = \text{konst.}$$

  $$\lambda + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -a_0$$

  Opće rješenje je

  $$y(x) = Ce^{-a_0 x}$$

- ODJ drugog reda

  $$y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\,, \quad a_0, a_1 = \text{konst.}$$

  $$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1, \lambda_2$$

  Imamo sljedeće slučajeve:

- $\star$ $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
- $\star$ $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$
- $\star$ $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \lambda_1^* = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$
$$y(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} =$$
$$= e^{\alpha x}\big(A_1\cos(\beta x) + A_2\sin(\beta x)\big) = Be^{\alpha x}\sin(\beta x + \phi)$$

Primjer: tjerano-gušeni harmonički oscilator

$$\ddot{x}(t) + 2b\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Pretpostavimo da je $b < \omega_0$. Karakteristična jednadžba,

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_\pm = -b \pm i\gamma\,, \quad \gamma \equiv \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

$$u_1(t) = e^{-bt}\cos(\gamma t)\,, \quad u_2(t) = e^{-bt}\sin(\gamma t)$$

$$u_1'(t) = \big(-b\cos(\gamma t) - \gamma\sin(\gamma t)\big)\,e^{-bt}\,, \quad u_2'(t) = \big(-b\sin(\gamma t) + \gamma\cos(\gamma t)\big)\,e^{-bt}$$

$$W[u_1,u_2](t) = \gamma e^{-2bt}$$

$$C_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-bt'}\sin(\gamma t')}{\gamma e^{-2bt'}}\,f(t')\,\mathrm{d}t' = -\frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{bt'}\sin(\gamma t')f(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$C_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-bt'}\cos(\gamma t')}{\gamma e^{-2bt'}}\,f(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{bt'}\cos(\gamma t')f(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$x_p(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{b(t'-t)}\big(\cos(\gamma t')\sin(\gamma t) - \sin(\gamma t')\cos(\gamma t)\big)f(t')\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{b(t'-t)}\sin(\gamma(t-t'))f(t')\,\mathrm{d}t'$$

Ukupno rješenje glasi

$$x(t) = e^{-bt}\big(A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)\big) + \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{b(t'-t)}\sin(\gamma(t-t'))f(t')\,\mathrm{d}t' \quad (4.33)$$

Pretpostavimo sada da je $t_0 = 0$, te početne uvjete $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = v_0$. Odavde odmah imamo $A = x(0) = x_0$. Nadalje, valja uočiti kako je $\dot{x}_p(0) = 0$, pa imamo

$$\dot{x}(0) = -bA + \gamma B = v_0\,, \quad B = \frac{v_0 + bx_0}{\gamma}$$

$$x(t) = e^{-bt}\left(x_0\cos(\gamma t) + \frac{v_0 + bx_0}{\gamma}\,\sin(\gamma t)\right) + \frac{1}{\gamma}\int_0^t e^{b(t'-t)}\sin(\gamma(t-t'))f(t')\,\mathrm{d}t'$$

Sličnim postupkom možemo analizirati i slučajeve $b > \omega_0$, kao i $b = \omega_0$.

Dodatak: snižavanje reda jednadžbe. U nekim posebnim slučajevima ODJ višeg reda

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

možemo se poslužiti nekim metodama snižavanja reda diferencijalne jednadžbe.

- ako F ne ovisi eksplicitno o x, $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, supstitucijom

$$p(y) \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\,, \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = p^2\,\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2} + p\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)^2\,, \quad \ldots$$

  spuštamo red jednadžbe s n na $n-1$.

- ako F ne ovisi eksplicitno o y, $F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ ili općenitije, ako F ne ovisi eksplicitno o y i prvih k derivacija y,

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

  supstitucijom $p \equiv y^{(k)}$ snižavamo red diferencijalne jednadžbe …

- ako je F homogena funkcija možemo spustiti red diferencijalne jednadžbe supstitucijom

$$z = \frac{y'}{y}\,, \quad y = \exp\left(\int z\mathrm{d}x\right)$$

§ 4.4 Frobeniusova metoda

Osnovna ideja je zapisati rješnje u obliku razvoja oko neke točke.

Lema 4.17. *ODJ prvog reda*

$$u'(z) + p(z)u(z) = 0 \tag{4.34}$$

ima rješenja oblika

$$u(z) = z^\lambda h(z)\,, \quad h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k\,, \quad h(0) = h_0 = 1$$

akko funkcija $p(z)$ ima najviše pol prvog reda u $z = 0$. U ovom slučaju je

$$\lambda = -\lim_{z\to 0} z\,p(z)$$

DOKAZ : Pretpostavimo da p ima najviše pol prvog reda u $z = 0$,

$$p(z) = \frac{p_0}{z} + p_1 + p_2 z + \dots$$

Direktnim rješavanjem …

$$u(z) = \exp\left(-\int_{z_0}^{z} p(v)\,dv\right) = A\exp\big(-p_0 \ln z - p_1 z - \dots\big) =$$

$$= Az^{-p_0}\exp\big(-p_1 z - \dots\big)$$

Konkretno, za $A = 1$ imamo $h_0 = 1$.

Obratno, iz $u = z^\lambda h$ dobivamo

$$u' = \lambda\,\frac{u}{z} + \frac{u}{h}\,h'$$

$$p(z) = -\frac{u'(z)}{u(z)} = -\frac{\lambda}{z} - \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Kako je po pretpostavci $h(0) = 1$, omjer h'/h je konačan u $z = 0$, pa slijedi da $p(z)$ ima najviše pol prvog reda u $z = 0$. □

Promotrimo sada linearnu ODJ drugog reda,

$$u'' + pu' + qu = 0 \tag{4.35}$$

Ako su oba koeficijenta, $p(z)$ i $q(z)$, analitičke na nekoj okolini točke z_0, tada kažemo da je z_0 **regularna točka** diferencijalne jednadžbe. Ako u točki z_0 funkcija $p(z)$ ima najviše pol prvog reda, a $q(z)$ najviše pol drugog reda, tada kažemo da diferencijalna jednadžba ima **regularni singularitet**. Pretpostavimo da promatrana diferencijalna jednadžba ima regularni singularitet u $z = 0$, pa koeficijenti imaju razvoje oblika

$$p(z) = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j\ , \quad q(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j \tag{4.36}$$

Tražimo rješenje oblika

$$u(z) = z^\lambda h(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k \tag{4.37}$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{C}$, $h(z)$ je analitička funkcija na nekoj okolini točke $z = 0$, te vrijedi $h(0) = 1$.

$$q(z)u(z) = z^{\lambda-2}\sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k = \{m = j + k\} = z^{\lambda-2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} q_j h_{m-j} z^m$$

$$p(z)u'(z) = z^{\lambda-2}\sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda + k)h_k z^k = \{m = j + k\} =$$

$$= z^{\lambda-2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}(\lambda + m - j)p_j h_{m-j} z^m$$

$$u''(z) = z^{\lambda-2} \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda+m)(\lambda+m-1)h_m z^m$$

Uvrštavanjem u ODJ, imamo uz $z^{m+\lambda-2}$

$$(\lambda+m)(\lambda+m-1)h_m + \sum_{j=0}^{m} \big((\lambda+m-j)p_j + q_j\big)h_{m-j} = 0$$

Članove s $j=0$ iz sume možemo udružiti s članom prije sume,

$$\big((\lambda+m)^2 + (p_0-1)(\lambda+m) + q_0\big)h_m + \sum_{j=1}^{m} \big((\lambda+m-j)p_j + q_j\big)h_{m-j} = 0$$

Kako je $h_0 = 1$, ovo nam za $m = 0$ daje **indicijalnu jednadžbu**,

$$\lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0 = 0 \tag{4.38}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 - p_0 \pm \sqrt{(p_0-1)^2 - 4q_0}\right) \tag{4.39}$$

Ovdje odabiremo konvenciju $\mathrm{Re}(\lambda_1) \geq \mathrm{Re}(\lambda_2)$. Uočimo kako je

$$\begin{aligned}(\lambda_i+m)^2 + (p_0-1)(\lambda_i+m) + q_0 &= \\ = \big(\lambda_i^2 + (p_0-1)\lambda_i + q_0\big) + m\big(2\lambda_i + (p_0-1) + m\big) &= \\ = m\left(m \pm \sqrt{(p_0-1)^2 - 4q_0}\right) = m\big(m \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\big)&\end{aligned}$$

gdje se gornji predznak odnosi na $\lambda = \lambda_1$, a donji predznak na $\lambda = \lambda_2$ slučaj. Koristeći ovo, u slučaju $\lambda = \lambda_1$, za sve $m > 0$ dobivamo

$$h_m = -\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2+m)m} \sum_{j=1}^{m} \big((\lambda_1+m-j)p_j + q_j\big)h_{m-j}\ . \tag{4.40}$$

Kako je $m \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \geq 0$, ovo je dobro definiran izraz (nema djeljenja s nulom). Time smo formalno dobili prvo rješenje promatrane diferencijalne jednadžbe, s koeficijentima h_m zadanima rekurzijom.

Nadalje, u slučaju $\lambda = \lambda_2$, za sve $m > 0$ dobivamo

$$h_m = -\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1+m)m} \sum_{j=1}^{m} \big((\lambda_2+m-j)p_j + q_j\big)h_{m-j}\ . \tag{4.41}$$

Ovdje se može pojaviti problem u slučaju kada je $\lambda_1 - \lambda_2 = n \in \mathbb{N}$, te kada imamo $m = n$. Naime, tada su koeficijenti h_m dobro definirani za $1 \leq m \leq n-1$, dok za $m = n$ imamo jednadžbu

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \big((\lambda_1 - j)p_j + q_j\big)h_{n-j}$$

Ako je posrijedi slučaj diferencijalne jednadžbe u kojem je ova jednakost zadovoljena, tada je odabir konstante h_n proizvoljan (ova sloboda dolazi od slobode odabira linearne kombinacije linearno nezavisnih rješenja u_1 i u_2), a preostale konstante h_m za

$m > n$ su ponovno definirane rekurzijom. U protivnom (ako gornja jednakost nije zadovoljena), ne postoji drugo rješenje oblika $z^{\lambda_2} h(z)$.

U potrazi za drugim rješenjem poslužit ćemo se metodom varijacije konstanti,

$$u_2(z) = c(z) u_1(z) = c(z) z^{\lambda_1} h(z) \tag{4.42}$$

$$u_2' = c' u_1 + c u_1' \,, \quad u_2'' = c'' u_1 + 2c' u_1' + c u_1''$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu imamo

$$c'' u_1 + 2c' u_1' + c u_1'' + p(c' u_1 + c u_1') + q c u_1 = 0$$

$$(u_1'' + p u_1' + q u_1) c + u_1 c'' + (2u_1' + p u_1) c' = 0$$

$$c'' + \left(2 \, \frac{u_1'}{u_1} + p \right) c' = 0$$

$$u_1(z) = z^{\lambda_1} h(z) \,, \quad u_1'(z) = \lambda_1 z^{\lambda_1 - 1} h(z) + z^{\lambda_1} h'(z) = \left(\frac{\lambda_1}{z} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right) u_1(z)$$

$$c''(z) + \left(2 \, \frac{\lambda_1}{z} + 2 \, \frac{h'(z)}{h(z)} + p(z) \right) c'(z) = 0 \tag{4.43}$$

Ovo je linearna ODJ prvog reda za c'.

$$\lim_{z \to 0} \frac{z h'(z)}{h(z)} = 0 \,, \quad \lim_{z \to 0} z p(z) = p_0 \,, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - p_0$$

$$\lim_{z \to 0} z \left(2 \, \frac{\lambda_1}{z} + 2 \, \frac{h'(z)}{h(z)} + p(z) \right) = 2\lambda_1 + p_0 = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$$

$$c'(z) = z^{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \,, \quad c_0 \neq 0 \tag{4.44}$$

Integriranjem sume član po član (pod uvjetom kako je posrijedi uniformno konvergentan red) dobivamo sljedeće slučajeve:

a) ako je $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}_0$

$$c(z) = z^{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_2 - \lambda_1 + j} \, z^j \tag{4.45}$$

b) ako je $\lambda_1 - \lambda_2 = n \in \mathbb{N}_0$

$$c(z) = z^{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{j=0, j \neq n}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_2 - \lambda_1 + j} \, z^j + c_n \ln z \tag{4.46}$$

U ovom slučaju još postoji mogućnost da je $c_n = 0$, osim ako je $n = 0$. Naime, u potonjem slučaju imamo

$$c'(z) = z^{-1} (c_0 + c_1 z + \dots)$$

a kako je $c_0 \neq 0$, mora postojati logaritamski dio rješenja.

Formalni iskazi,

Teorem 4.18. *Ako je $z = z_0$ regularna točka, tada je svako rješenje jednadžbe (4.35) analitičko u $z = z_0$.*

Teorem 4.19. **(Fuchs)** *Ako je $z = z_0$ regularni singularitet, tada je svako rješenje jednadžbe (4.35) ili a) analitičko na nekoj okolini točke z_0 ili b) posjeduje pol ili točku grananja logaritamskog tipa u točki z_0.*

U ovoj analizi smo dobili *oblik* rješenja. Sada nas zanimaju praktični detalji u postupku rješavanja. Za početak valja napomenuti kako razmatranje razvoja oko $x = 0$ ne umanjuje općenitost rasprave jer je suspstitucijom uvijek moguće dovesti razvoj u ishodište (s $t = x - x_0$ ako je $x_0 \neq \pm\infty$, odnosno s $t = 1/x$ ako je $x_0 = \pm\infty$). Uvrštavanjem ansatza

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^{n+\lambda} \tag{4.47}$$

dobivamo rekurzijske jednadžbe za koeficijente a_n, među kojima je najnižeg reda indicijalna jednadžba, konkretno, kvadratna jednadžba oblika $I(\lambda) = 0$.

Ako su rješenja ove jednadžbe par kompleksno konjugiranih brojeva $\lambda_\pm = \alpha \pm i\beta$, tada dva linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadžbe dobivamo direktnim uvrštavanjem $\lambda_\pm$ u (4.47). Na primjer, diferencijalna jednadžba

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

ima indicijalnu jednadžbu $I(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$, što daje $\lambda_\pm = \pm i$, a ostale rekurzije daju $a_n = 0$ za $n \geq 1$. Dakle, opće rješenje je oblika

$$y(x) = Ax^i + Bx^{-i} = Ae^{i \ln x} + Be^{-i \ln x} = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$$

Ako su rješenja indicijalne jednadžbe $I(\lambda) = 0$ realni brojevi λ_1 i $\lambda_2 < \lambda_1$, tada prvo rješenje dobivamo direktnim uvrštavanjem $\lambda = \lambda_1$ u (4.47),

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^n$$

Drugo rješenje ovisi o odnosu korjena λ_1 i λ_2:

a) ako je $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, i drugo rješenje se dobije direktnim uvrštavanjem $\lambda = \lambda_2$ u (4.47), odnosno

$$y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) x^n \tag{4.48}$$

b) ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tada je drugo rješenje oblika

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda_2) x^n \tag{4.49}$$

te ga možemo generirati pomoću formule

$$y_2(x) = \frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1} \tag{4.50}$$

Naime, u ovom slučaju imamo

$$L_x[y(x,\lambda)] \sim I(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$$

$$L_x \frac{\partial}{\partial \lambda} y(\lambda, x)\Big|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(L_x[y(x,\lambda)])\Big|_{\lambda=\lambda_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^{n+\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(\lambda) x^{n+\lambda} + y(x,\lambda) \ln x$$

c) ako je $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$, tada je drugo rješenje oblika

$$y_2(x) = b_{-1} y_1(x) \ln x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda_2) x^n \tag{4.51}$$

Ovdje valja biti oprezan, i prvo ispitati rješenje dobiveno direktnim uvrštavanjem $\lambda = \lambda_2$ u (4.47); ako dobijemo drugo linearno nezavisno rješenje, onda je to $y_2(x)$ uz $b_{-1} = 0$. U protivnom koristimo formulu

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\big((\lambda - \lambda_2) y(\lambda, x)\big)\Big|_{\lambda=\lambda_2} \tag{4.52}$$

Naime, u ovom slučaju imamo

$$L_x[y(x,\lambda)] \sim I(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$L_x \frac{\partial}{\partial \lambda}\big((\lambda - \lambda_2) y(\lambda, x)\big)\Big|_{\lambda=\lambda_2} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\big((\lambda - \lambda_2) L_x[y(\lambda, x)]\big)\Big|_{\lambda=\lambda_2} \sim$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial \lambda}\big((\lambda - \lambda_2) I(\lambda)\big)\Big|_{\lambda=\lambda_2} = I(\lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_2) I'(\lambda_2) = 0$$

Preostaje još provjeriti kako ova formula uistinu općenito daje traženi oblik drugog rješenja …

§ 4.5 Hipergeometrijska diferencijalna jednadžba

U nizu fizikalnih problema nailazimo na ODJ drugo reda koje pripadaju klasi diferencijalnih jednadžbi zadanoj s tri parametra,

$$x(1-x)y''(x) + \big(c - (a+b+1)x\big)y'(x) - ab\,y(x) = 0 \tag{4.53}$$

Regularni singulariteti u $x = 0, 1$. Primjenom Frobeniusove metode,

$$\big((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (a+b+1)(n+\lambda) + ab\big)a_n -$$

$$-\big((n+\lambda)(n+\lambda+1) + c(n+\lambda+1)\big)a_{n+1} = 0$$

Indicijalna jednadžba

$$I(\lambda) = \lambda(\lambda - 1 + c) = 0\,, \quad \lambda_{1,2} = 0, 1-c \tag{4.54}$$

Rekurzija,

$$a_{n+1} = \frac{(n+\lambda)(n+\lambda+a+b)+ab}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+c)}\,a_n = \frac{(n+\lambda+a)(n+\lambda+b)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+c)}\,a_n$$

$$a_n = \frac{(\lambda+a)_n(\lambda+b)_n}{(\lambda+1)_n(\lambda+c)_n}\,a_0 \tag{4.55}$$

$$y(x,\lambda) = a_0 x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+a)_n(\lambda+b)_n}{(\lambda+1)_n(\lambda+c)_n}\,x^n \tag{4.56}$$

Među rješenjima će se pojavljivati tzv. **hipergeometrijska funkcija**,

$${}_2F_1(a,b;c;x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,\frac{x^n}{n!} \tag{4.57}$$

Sada prelazimo na analizu slučajeva (radi jednostavnosti zapisa biramo $a_0 = 1$). Ako je $c \notin \mathbb{Z}$, tada oba rješenja dobivamo direktim uvrštavanjem (u ovom slučaju je svejedno koje rješenje obilježavamo kao "prvo", a koje kao "drugo"), za $\lambda = 0$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}\,x^n = {}_2F_1(a,b;c;x)$$

te za $\lambda = 1-c$,

$$y_2(x) = x^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{(2-c)_n\,n!}\,x^n =$$

$$= x^{1-c}\,{}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x)$$

Ako je $c \in \mathbb{Z}$ tada razlikujemo naredne slučajeve,

a) slučaj $c > 1$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 - c$

Prvo rješenje za $\lambda = \lambda_1$,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} \, x^n \equiv \, {}_2F_1(a, b; c; x)$$

Drugo rješenje,

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \left((\lambda + c - 1) \left(\sum_{n=0}^{c-2} + \sum_{n=c-1}^{\infty} \right) f_n(\lambda) x^{n+\lambda} \right)_{\lambda=1-c}$$

gdje je

$$f_n(\lambda) = \frac{(\lambda + a)_n (\lambda + b)_n}{(\lambda + 1)_n (\lambda + c)_n}$$

Primjetimo kako se nula krije u faktoru $(\lambda_2 + c)_n$ za $n \ge c - 1$, pa je

$$\lim_{\lambda \to \lambda_2} (\lambda + c - 1) f_n(\lambda) = \frac{(a + 1 - c)_n (b + 1 - c)_n}{(-1)^c (c - 2)! (n + 1 - c)! n!}$$

za $n \ge c - 1$, a nula inače. Koristeći pokratu $\hat{f}_n(\lambda) = (\lambda + c - 1) f_n(\lambda)$ i "trik" pomoću logaritma, za sve $n \ge c - 1$ imamo

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln \hat{f}_n(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_2} = \frac{\hat{f}'_n(\lambda_2)}{\hat{f}_n(\lambda_2)} =$$

$$= H_{a+n-c} - H_{a-c} + H_{b+n-c} - H_{b-c} + H_{c-2} - H_{n+1-c} - H_n$$

gdje smo koristili

$$\frac{1}{(p)_n} = H_{p+n-1} - H_{p-1} \, , \quad p \in \mathbb{N}$$

Konačno,

$$y_2(x) = x^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=c-1}^{\infty} \hat{f}_n(1 - c) x^{n+1-c} \ln x$$

gdje je

$$b_n = \begin{cases} f_n(1 - c) \, , & n \le c - 2 \\ \hat{f}'_n(1 - c) \, , & n \ge c - 1 \end{cases}$$

Druga suma sa supstitucijom $k = n - (c - 1)$ prelazi u

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{k+c-1}(1 - c) x^k \ln x$$

Kako je

$$\hat{f}_{k+c-1}(1 - c) = \frac{(a + 1 - c)_{k+c-1} (b + 1 - c)_{k+c-1}}{(-1)^c (c - 2)! k! (k + c - 1)!} =$$

$$= (-1)^c \, \frac{(a+1-c)_{c-1}(b+1-c)_{c-1}}{(c-2)!(c-1)!} \, \frac{(a)_k(b_k)}{(c)_k k!}$$

imamo traženi oblik drugog rješenja,

$$y_2(x) = x^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + b_{-1} y_1(x) \ln x$$

$$b_{-1} = (-1)^c \, \frac{(a+1-c)_{c-1}(b+1-c)_{c-1}}{(c-2)!(c-1)!}$$

b) slučaj $c = 1$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Prvo rješenje za $\lambda = 0$,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \, x^n = {}_2F_1(a, b; 1; x)$$

Drugo rješenje,

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0}$$

$$\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial \lambda} = y(x,\lambda) \ln x + x^{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \, x^n \ , \qquad f_n(\lambda) = \frac{(\lambda+a)_n (\lambda+b)_n}{((\lambda+1)_n)^2}$$

Valja uočiti kako je $f_0 = 1$, pa njegova derivacija odmah otpada. Sada upotrebljavamo standardni trik,

$$\ln f_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(\lambda+a+k) + \ln(\lambda+b+k) - 2\ln(\lambda+1+k) \big)$$

Deriviranjem po λ dobivamo

$$\frac{1}{f_n} \, \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda+a+k} + \frac{1}{\lambda+b+k} - \frac{2}{\lambda+1+k} \right)$$

Uvrštavanjem $\lambda = 0$ dobivamo

$$\frac{\partial f_n}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left(-2H_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{b+k} \right) \right) \equiv b_n$$

Dakle,

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

c) slučaj $c < 1$: $\lambda_1 = 1 - c$, $\lambda_2 = 0$

Prvo rješenje za $\lambda = \lambda_1$,

$$y_1(x) = x^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n (b+1-c)_n}{(2-c)_n \, n!} \, x^n =$$

$$= x^{1-c}\,{}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x)$$

Uvedimo pomoćni zapis $c = -m$, gdje je $m \in \mathbb{N}_0$. Drugo rješenje,

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left((\lambda - 0)\left(\sum_{n=0}^{m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\right) f_n(\lambda) x^{n+\lambda}\right)_{\lambda=0}$$

gdje je

$$f_n(\lambda) = \frac{(\lambda+a)_n(\lambda+b)_n}{(\lambda+1)_n(\lambda-m)_n}$$

Koristeći pokratu $\hat{f}_n(\lambda) = \lambda f_n(\lambda)$, imamo

$$\lim_{\lambda\to 0}\hat{f}_n(\lambda) =$$

$$= \frac{(a)_n(b)_n}{n!}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{(\lambda-m)\cdots(\lambda-1)\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda-m+n-1)} =$$

$$= \frac{(a)_n(b)_n}{n!}\,\frac{(-1)^m}{m!(n-m-1)!}$$

za sve $n > m$, a nula inače. Nadalje, koristeći "trik" pomoću logaritma,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\hat{f}_n(\lambda)\big|_{\lambda=0} = \frac{\hat{f}'_n(0)}{\hat{f}_n(0)} =$$

$$= H_m - H_n - H_{n-m-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{b+k}\right)$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{m} f_n(0)x^n + \sum_{n=m+1}^{\infty}\hat{f}'_n(0)x^n + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^m(a)_n(b_n)}{m!n!(n-m-1)!}\,x^n\ln x$$

Koristeći supstituciju $k = n - (m+1)$ posljednju sumu možemo napisati u obliku

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^m(a)_n(b_n)}{m!n!(n-m-1)!}\,x^n = \frac{(-1)^m(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{m!(m+1)!}\,y_1(x)\ln x$$

pa je

$$y_2(x) = b_{-1}y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$b_n = \begin{cases} f_n(0)\,, & n \le m \\ \hat{f}'_n(0)\,, & n \ge m+1 \end{cases} \quad , \quad b_{-1} = (-1)^m\,\frac{(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{m!(m+1)!}$$

Valja još analizirati konvergenciju ovih redova, te razvoje oko drugih točaka.

Generalizirana hipergeometrijska funkcija

$$_pF_q(a_1,\ldots,a_p; b_1,\ldots,b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\,\frac{z^n}{n!} \tag{4.58}$$

Područje konvergencije ovih redova možemo vidjeti pomoću testa omjerom,

$$c_n = \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_p)_n} \frac{z^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a_1+n)\cdots(a_p+n)}{(b_1+n)\cdots(b_q+n)} \frac{z}{n+1} \right| = \begin{cases} 0\,, & p < q+1 \\ |z|\,, & p = q+1 \\ \infty\,, & p > q+1 \end{cases}$$

odakle slijedi da je radijus konvergencije

$$R = \begin{cases} \infty\,, & p < q+1 \\ 1\,, & p = q+1 \\ 0\,, & p > q+1 \end{cases}$$

Primjeri,

$$_0F_0(\,;\,;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$_1F_0(a;\,;z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{z^n}{n!} = (1-z)^{-a}$$

$$_2F_1(-m,1;1;-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-m)_n \frac{(-z)^n}{n!} = (1+z)^m$$

$$z\,{}_2F_1(1,1;2;-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2)_n} \frac{z(-z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \ln(1+z)$$

Potpuni eliptički integral prve i druge vrste,

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-m\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(1/2,1/2;1;m)$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1(-1/2,1/2;1;m)$$

Tri primjera s eliptičkim integralima,

- opseg elipse s poluosima a i $b < a$,

$$x(t) = a\cos t\,, \quad y(t) = b\cos t$$

$$o = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = a^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t = a^2\left(1-m\cos^2 t\right)\,, \quad m = 1-\frac{b^2}{a^2}$$

Koristeći supstituciju $t = \pi/2 - u$ imamo

$$o = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m\sin^2 u}\,du$$

Stoga,

$$o(a,b) = 4aE\big(1-(b/a)^2\big) \tag{4.59}$$

Specijalno, za kružnicu imamo $a = b = r$ pa je

$$o(r) = 4rE(0) = 2\pi r$$

- period matematičkog njihala duljine niti ℓ: očuvanje energije

$$mg\ell(1-\cos\theta_0) = mg\ell(1-\cos\theta) + \frac{m(\ell\dot{\theta})^2}{2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\,(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{4g}{\ell}\,\big(\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)\big)$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

$$\int_0^{T/4} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

$$T = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}\ , \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Koristeći supstituciju

$$\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2)\sin t\ , \quad \frac{1}{2}\,\cos(\theta/2)\,d\theta = \sin(\theta_0/2)\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} = \frac{2\sin(\theta_0/2)\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos(\theta/2)}\,\frac{1}{\sin(\theta_0/2)\cos t} =$$

$$= \frac{2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-m\sin^2 t}}\ , \quad m = \sin^2(\theta_0/2)$$

dobivamo

$$T(\theta_0) = \frac{2}{\pi}\,K\big(\sin^2(\theta_0/2)\big)\,T_0 \tag{4.60}$$

Primjetimo kako je $K(0) = \pi/2$ i stoga

$$\lim_{\theta_0\to 0} T(\theta_0) = T_0$$

- magnetski vektorski potencijal kružne petlje [vidi Jackson, (5.37)]

§ 4.6 Sustavi linearnih ODJ

Primjer. Radioaktivna tvar A se raspada u tvar B s vremenom poluraspada τ_A, a tvar B u stabilnu tvar C s vremenom poluraspada $\tau_B \neq \tau_A$. Ako na početku imamo N_0 čestica stvari A, pronađite kako se s vremenom mijenjaju količine sve tri tvari.

Ako upotrijebimo uobičajane pokrate $\lambda_A = (\ln 2)/\tau_A$, te $\lambda_B = (\ln 2)/\tau_B$, broj čestica tvari A, B i C dan je sustavom diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}t} = -\lambda_A N_A \tag{4.61}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B \tag{4.62}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_C}{\mathrm{d}t} = \lambda_B N_B \tag{4.63}$$

uz početne uvjete

$$N_A(0) = N_0 \ , \quad N_B(0) = N_C(0) = 0 \tag{4.64}$$

Osnovna ideja: prikazati sustav u matričnom zapisu

$$n = \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \end{pmatrix}$$

$$\dot{n} = An \ , \quad A = \begin{pmatrix} -\lambda_A & 0 & 0 \\ \lambda_A & -\lambda_B & 0 \\ 0 & \lambda_B & 0 \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

i pokušati s ansatzom

$$n(t) = e^{\lambda t} v \ ,$$

gdje je v konstantan vektor, odakle (uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu) slijedi da je λ svojstvena vrijednost, a v svojstveni vektor matrice A,

$$Av = \lambda v$$

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda_A - \lambda & 0 & 0 \\ \lambda_A & -\lambda_B - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_B & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda + \lambda_A)(\lambda + \lambda_B)$$

$$\lambda_0 = 0 \ , \quad \lambda_1 = -\lambda_A \ , \quad \lambda_2 = -\lambda_B$$

Svojstveni vektori,

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \\ -\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} \end{pmatrix} \ , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Opće rješenje,

$$n(t) = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 e^{-\lambda_A t} v_1 + \alpha_2 e^{-\lambda_B t} v_2$$

Početni uvjet,

$$n(0) = \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} + \alpha_2 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = N_0 \ , \quad \alpha_2 = -\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_0 \ , \quad \alpha_0 = N_0$$

$$N_A(t) = N_0 e^{-\lambda_A t} \ , \quad N_B(t) = \frac{N_0 \lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t} \right)$$

$$N_C(t) = N_0 \left(1 + \frac{\lambda_A e^{-\lambda_B t} - \lambda_B e^{-\lambda_A t}}{\lambda_B - \lambda_A} \right)$$

Potencijalne komplikacije: degenerirane svojstvene vrijednosti (npr. slučaj kada je $\lambda_A = \lambda_B$) i nehomogeni sustavi …

Općeniti postupak. Problem zapišemo u matričnom obliku

$$\dot{u} = Au + q(t) \ , \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \ , \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

Ako sada član s matricom A prebacimo na lijevu stranu i jednadžbu pomnožimo s lijeve strane s $\exp(-(t-t_0)A)$,

$$e^{-(t-t_0)A} \, \dot{u}(t) - A e^{-(t-t_0)A} \, u(t) = e^{-(t-t_0)A} \, q(t)$$

vidimo kako je onda jednadžbu moguće zapisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-(t-t_0)A} \, u(t) \right) = e^{-(t-t_0)A} \, q(t)$$

$$e^{-(t-t_0)A} \, u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} \, q(s) \, \mathrm{d}s$$

Množenjem jednadžbe s $\exp((t-t_0)A)$ dobivamo tzv. **Duhamelovu formulu**

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t)A} \, q(s) \, \mathrm{d}s \tag{4.67}$$

Napomena: ovaj postupak ne vrijedi ako A nije konstantna matrica!

Provjera na slučaju radioaktivnog raspada $A \to B \to C$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} & 1 \\ 1 & -\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} & -1 \end{pmatrix} \ , \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_A & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_B \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_A t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_B t} \end{pmatrix} S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\lambda_A t} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right) & e^{-\lambda_B t} & 0 \\ 1 + \frac{1}{\lambda_B - \lambda_A}\left(\lambda_A e^{-\lambda_B t} - \lambda_B e^{-\lambda_A t}\right) & 1 - e^{-\lambda_B t} & 1 \end{pmatrix}$$

Množenjem $e^{tA}n(0)$ dobivamo rezultat identičan ranijem.

U "degeneriranom" slučaju kada je $\lambda_A = \lambda_B$ matricu A više ne možemo dijagonalizirati, ali je možemo svesti na Jordanovu formu (vidi dodatak). Konkretno, pomoću matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_A & -1 \\ 1 & -\lambda_A & 0 \end{pmatrix}$$

imamo

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_A & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_A \end{pmatrix}$$

pa je

$$e^{tA} = Se^{tJ_A}S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_A t} & 0 & 0 \\ \lambda_A t e^{-\lambda_A t} & e^{-\lambda_A t} & 0 \\ 1 - (1 + \lambda_A t)e^{-\lambda_A t} & 1 - e^{-\lambda_A t} & 1 \end{pmatrix}$$

$$n(t) = e^{tA}n(0) = \begin{pmatrix} N_0 e^{-\lambda_A t} \\ N_0 \lambda_A t e^{-\lambda_A t} \\ N_0\left(1 - (1 + \lambda_A t)e^{-\lambda_A t}\right) \end{pmatrix}$$

Komentar 4.20. Geometrijska interpretacija. Označimo s $\{e_1, \ldots, e_n\}$ kanonsku bazu vektora u $\mathbb{R}^n$, te promotrimo kako se oni razvijaju djelovanjem operatora

$$B(\tau) = e^{\tau A}$$

Hipervolumen razapet vektorima $\{Be_1, \ldots, Be_n\}$ dan je determinantom

$$|Be_1 \cdots Be_n|$$

Međutim, kako je

$$Be_i = \begin{pmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \\ \vdots \\ B_{ni} \end{pmatrix} \quad , \quad (Be_1 \cdots Be_n) = B$$

slijedi

$$|Be_1 \cdots Be_n| = \det B = e^{\tau \operatorname{Tr} A}$$

Drugim riječima, trag matrice A sadrži informaciju o promjeni hipervolumena razapetog rješenjima sustava linearnih ODJ. //

Sustavi linearnih ODJ 2. reda. U slučaju kada imamo sustav oblika

$$\ddot{u}(t) = A\dot{u}(t) + Bu(t) + q(t) \tag{4.68}$$

s *konstantnim matricama* A i B, možemo ga svesti na sustav 1. reda narednim postupkom. Uvedemo li novi vektor $v \equiv \dot{u}$, tada je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \ddot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \mathbb{1} \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$$

Uvođenjem oznaka

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} O & \mathbb{1} \\ B & A \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$$

vidimo da je početni sustav sveden na sustav prvog reda,

$$\dot{w}(t) = Mw(t) + p(t) \tag{4.69}$$

s rješenjem

$$w(t) = e^{(t-t_0)M}w(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t)}p(s)\,\mathrm{d}s \tag{4.70}$$

Sustavi s promjenjivom matricom [skica]. Promotrimo problem oblika

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{4.71}$$

Rješenje formalno zapisujemo u obliku

$$x(t) = S(t,t_0)x_0\,, \quad S(t_0,t_0) = \mathbb{1} \tag{4.72}$$

gdje je S matrica "vremenske evolucije", a $x_0 = x(t_0)$. Uvrštavanjem natrag u jednadžbu imamo

$$\dot{S}(t,t_0) = A(t)S(t,t_0)$$

Integriranjem u granicama od t_0 do t jednadžbu prebacujemo iz diferencijalne u integralnu,

$$S(t,t_0) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} A(t')S(t',t_0)\,\mathrm{d}t' \tag{4.73}$$

Iterativnim uvrštavanjem dobivamo

$$S(t,t_0) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\,A(t')\left(\mathbb{1} + \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\,A(t')S(t'',t_0)\right) =$$

$$= \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\,A(t') + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\,A(t')S(t'',t_0) =$$

$$= \mathbb{1} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\,A(t') + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\,A(t')A(t'') + \cdots$$

Sada uvodimo tzv. **operator vremenskog uređenja** T,

$$T\big\{A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\big\} = A(t_{\tau(1)})A(t_{\tau(2)})\cdots A(t_{\tau(n)})$$

tako da je $t_{\tau(1)} \ge t_{\tau(2)} \ge \cdots \ge t_{\tau(n)}$. Drugim riječima, operator T presloži matrice tako da vremena idu s lijeva na desno od najkasnijeg prema ranijim. Djelovanje ovog operatora možemo zapisati pomoću θ-funkcije,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1\,, & t \ge 0 \\ 0\,, & t < 0 \end{cases}$$

Označimo li sa S_n skup permutacija skupa $\{1,\dots,n\}$, tada je

$$T\big\{A(t_1)\cdots A(t_n)\big\} =$$

$$= \sum_{\pi\in S_n} \theta(t_{\pi(1)} - t_{\pi(2)})\theta(t_{\pi(2)} - t_{\pi(3)})\cdots\theta(t_{\pi(n-1)} - t_{\pi(n)})A(t_{\pi(1)})\cdots A(t_{\pi(n)})$$

Promotrimo za početak integral

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, T\big\{A(t_2)A(t_1)\big\} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \theta(t_2 - t_1)A(t_2)A(t_1) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \theta(t_1 - t_2)A(t_1)A(t_2)$$

Prvo valja uočiti kako se drugi integral svodi na prvi preimenovanjem varijabli $t_1 \leftrightarrow t_2$. Imamo stoga

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, T\big\{A(t_2)A(t_1)\big\} = 2\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \theta(t_2 - t_1)A(t_2)A(t_1) =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, A(t_2)A(t_1)$$

Analognim postupkom vidimo kako je

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, T\big\{A(t_n)\cdots A(t_1)\big\} =$$

$$= n!\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \theta(t_n - t_{n-1})\cdots\theta(t_2 - t_1)\, A(t_n)\cdots A(t_1) =$$

$$= n!\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \int_{t_0}^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1\, A(t_n)\cdots A(t_1)$$

gdje smo u svakom članu sume (u rastavu operatora vremenskog uređenja) preimenovali varijable

$$t_n = t_{\pi(n)}\,,\ t_{n-1} = t_{\pi(n-1)}\,,\ \dots,\ t_1 = t_{\pi(1)}$$

te iskoristili činjenicu da skup S_n ima $n!$ članova. Stoga,

$$S(t,t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, T\big\{A(t_n)\cdots A(t_1)\big\}$$

ili skraćeno zapisano

$$S(t,t_0) = T\exp\left(\int_{t_0}^t A(t')\,\mathrm{d}t'\right) \tag{4.74}$$

Ovaj razvoj poznat je kao **Dysonov razvoj**.

Usputni problem. Nasumično odabiremo realne brojeve iz intervala $[0,1]$, te ih zbrajamo. U trenutku kada suma prijeđe iznos 1, postupak se prekida. Izračunajte srednji očekivani broj odabranih brojeva u ovakvom postupku.

Rješenje. Označimo odabrane brojeve s $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, te sa s_n sumu prvih n brojeva,

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

Ako je p_n vjerojatnost da je postupak prekinut upravo na n-tom broju, odnosno da je $s_{n-1} < 1$ i $s_n \geq 1$, tada je traženi srednji očekivani broj odabranih brojeva dan sumom

$$\langle n\rangle = \sum_{n=1}^\infty p_n n$$

Odmah vidimo kako je $p_1 = 0$. U slučajevima $n \geq 2$ vjerojatnosti p_n možemo zapisati pomoću višestrukog integrala,

$$p_n = \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_{s_1}^1 \mathrm{d}s_2 \cdots \int_{s_{n-2}}^1 \mathrm{d}s_{n-1} \int_1^{1+s_{n-1}} \mathrm{d}s_n$$

Primjetimo prvo kako je u posljednjem integralu moguće pojednostaviti integracijske granice zamjenom $s_n \to s_n - 1$,

$$p_n = \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_{s_1}^1 \mathrm{d}s_2 \cdots \int_{s_{n-2}}^1 \mathrm{d}s_{n-1} \int_0^{s_{n-1}} \mathrm{d}s_n$$

Nadalje, cjelokupni izraz možemo elegantnije zapisati pomoću θ-funkcija,

$$p_n = \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \cdots \int_0^1 \mathrm{d}s_n\,\theta(s_2 - s_1)\theta(s_3 - s_2)\cdots\theta(s_{n-1} - s_{n-2})\theta(s_{n-1} - s_n)$$

Za svaki $x \neq 0$ vrijedi $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$, a jednakost je uz prikladnu normalizaciju (u ovom slučaju odabirom $\theta(0) = 1/2$) ispunjena i za $x = 0$. U svakom slučaju možemo ustvrditi kako jednakost

$$\theta(s_{n-1} - s_n) = 1 - \theta(s_n - s_{n-1})$$

vrijedi do na skup točaka mjere nula (konkretno, osim eventualno tamo gdje je $s_{n-1} = s_n$). Ovo nam omogućuje zapis vjerojatnosti p_n kao razlike

$$p_n = I_{n-1} - I_n$$

gdje je

$$I_n \equiv \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \cdots \int_0^1 \mathrm{d}s_n \, \omega_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

$$\omega_n(s_1, s_2, \ldots, s_n) \equiv \theta(s_2 - s_1)\theta(s_3 - s_2) \cdots \theta(s_{n-1} - s_{n-2})\theta(s_n - s_{n-1})$$

Sada valja uočiti kako jednakost

$$\sum_{\pi \in S_n} \omega_n(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \ldots, s_{\pi(n)}) = 1$$

vrijedi do na skup točaka mjere nula (konkretno, osim eventualno tamo gdje su neke od varijabli s_i međusobno jednake), te kako se vrijednost integrala I_n ne mijenja permutiranjem varijabli funkcije ω_n (posrijedi je tek preimenovanje slijepih integracijskih varijabli). Kako skup permutacija S_n ima $n!$ članova, slijedi da je

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 ds_1 \cdots \int_0^1 ds_n = \frac{1}{n!}$$

$$p_n = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n(n-2)!}$$

i konačno

$$\langle n \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n(n-2)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = e$$

5

Fourierov red

Neformalan uvod. Fourier je dao ideju kako funkcije možemo razviti u red sinusa i kosinusa,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

Zašto nam uopće treba *još jedan* razvoj funkcija, zar nije Taylorov razvoj sasvim dovoljan? Prisjetimo se, klasa funkcija koje dopuštaju razvoj u Taylorov red je iznimno restriktivna, općenito nije dovoljno niti to da je riječ o glatkim funkcijama! S druge strane, Fourierov red će se pokazati uspješnim i kod funkcija koje su samo neprekidne, a u nekoj mjeri i kod funkcija s prekidima.

Naša ambicija ovdje sastoji se od više formalnih točaka,

- Odabrati koeficijente u konačnoj Fourierovoj sumi, tako da ona "optimalno" opisuje zadanu funkciju. Ovdje nam treba pojam *udaljenosti* među funkcijama: optimalan izbor koeficijenata je onaj kod kojeg je "udaljenost" između konstruirane sume i zadane funkcije minimalna.
- Poopćiti pojam konvergiranja Fourierovog reda na situacije kada konvergencija "po točkama" ne radi (za definiciju konvergencije nam je svakako potreban neki pojam "udaljenosti").
- Smjestiti funkcije koje razvijamo u Fourierove redove u nekakav prikladan apstraktni *prostor*. Pobrinute se da je ovaj prostor *potpun*, odnosno da nema "rupa" u odnosu na Cauchyjeve nizove, poput primjerice racionalnih brojeva na skupu realnih brojeva.

Koji formalizam nam je neophodan u ovom kontekstu? Sve ovo smo već susreli kod prostora vektora u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$. Jedan od temeljnih pojmova je skalarni produkt vektora, pomoću kojeg možemo uvesti njihovu normu,

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

Zadani vektor $\boldsymbol{v}$ možemo "aproksimirati" vektorom u nekoj ravnini, razapetoj ortogonalnim jediničnim vektorima $\boldsymbol{e}_1$ i $\boldsymbol{e}_2$, pomoću ortogonalne projekcije,

$$\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_2$$

Kao “udaljenost” među vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nam može poslužiti norma, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, pomoću koje možemo definirati konvergiranje niza vektora. Sve ovo nam služi kao motivacija za uvođenje *apstraktnih* vektorskih prostora, uz poopćene pojmove skalarnog produkta i norme, čiji će elementi moći biti i funkcije.

U kontekstu Fourierovih redova posebno važnu ulogu igra vektorski prostor *kvadratno integrabilnih funkcija*, onih za koje je integral

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

dobro definiran (konvergetan, konačan). Na ovom prostoru ćemo definirati skalarni produkt oblika

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)^* g(x) \, \mathrm{d}x$$

s induciranom normom

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Međutim, ovdje nailazimo na prvu formalnu prepreku, vezanu za izbor definicije integrala. Promotrimo naredni primjer, u kojem ćemo koristiti jednu pomoćnu oznaku: za svaki skup $A \subseteq \mathbb{R}$ definiramo tzv. **karakterističnu funkciju**, $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in A \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} - A \end{cases} \tag{5.1}$$

Možemo li integrirati tzv. **Dirichletovu funkciju** $\chi_{\mathbb{Q}}$, koja u racionalnim brojevima poprima vrijednost 1, a u iracionalnim brojevima vrijednost 0? Ima li smisla Riemannov integral

$$\int_0^1 \left|\chi_{\mathbb{Q}}(x)\right|^2 \mathrm{d}x = ?$$

Integral po Riemannu, na primjer, nije dobro definiran jer gornja Darbouxova suma je uvijek jednaka 1, a donja 0. S druge strane, skup racionalnih brojeva je beskonačan, ali prebrojiv, pa postoji bijekcija $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, koju možemo iskoristiti za “organiziranje” racionalnih brojeva u niz $(q(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Označimo s $\mathbb{Q}_N$ skup “prvih” N racionalnih brojeva

$$\mathbb{Q}_N = \{q(1), \ldots, q(N)\}$$

Tada je $\chi_{\mathbb{Q}_N}$ kvadratno integrabilna funkcija za svaki $N \in \mathbb{N}$. Nadalje, lako se provjeri da je $(\chi_{\mathbb{Q}_N})_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u prostoru kvadratno integrabilnih funkcija,

$$||\chi_{\mathbb{Q}_m} - \chi_{\mathbb{Q}_n}||^2 = \int_a^b |\chi_{\mathbb{Q}_m}(x) - \chi_{\mathbb{Q}_n}(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

ali njegov formalni limes, funkcija $\chi_{\mathbb{Q}}$, nije kvadratno integrabilna po Riemannu!

Zaključak je kako nam treba nova definicija integrala koja je bar u ovom kontekstu općenitija od Riemannovog.

§ 5.1 Kratak uvod u teoriju mjere

Što nam uopće daju integrali? S njima smo navikli pronalaziti duljine krivulja, površine ploha, volumene tijela, itd. Drugim riječima, pridjeljujemo *mjeru* različitim skupovima. Kako kod mjera bila definirana, od nje očekujemo neka “prirodna” svojstva, poput onog da je mjera složenog objekta jednaka sumi mjera pridjeljenih dijelovima od kojih je taj objekt sastavljen. Ovdje se onda nameće jedno prirodno pitanje, neformalno poznat kao *problem mjere*: možemo li *svim* skupovima konzistentno pridjeliti mjeru? Početak problema uviđamo prilikom rastava skupova na beskonačno mnogo dijelova. Primjerice, segment $[0,1]$ je moguće “presložiti” (bijekcijom $x \mapsto 2x$) u segment $[0,2]$ dvostruke duljine! No, što ako odustanemo od rastava skupova na *beskonačan* broj dijelova i držimo se samo rastava na *konačne* particije? Pomalo neočekivano, ovdje problem mjere dotiče same temelje matematike. Ernst Zermelo je 1904. godine izdvojio jedan važan aksiom teorije skupova koji se često (implicitno) koristi u matematičkim dokazima,

> **Aksiom izbora**. Neka je J neprazan skup i $\{A_i\}_{i\in J}$ familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Tada postoji skup B, takav da je za svaki $i \in J$ presjek $B \cap A_i$ jednočlan skup.

Drugim riječima, aksiom izbora kaže kako za svaki skup X nepraznih skupova postoji *funkcija izbora*, preslikavanje f koje svakom skupu $A \in X$ pridružuje element $f(A) \in A$. Naizgled, intuitivno je jasno kako iz *konačnog* skupa kutija s predmetima uvijek možemo izdvojiti po jedan predmet iz svake kutije i tako formirati skup “reprezentanata”. No, aksiom izbora kaže da takav izbor možemo uvijek napraviti, čak i kada familija skupova nije konačna. Prihvatimo li aksiom izbora u temeljima teorije skupova (zajedno s ostatkom ZF aksioma), kao posljedicu imamo tzv. *paradoks Banach-Tarskog*. Ukratko, riječ je o teoremu koji tvrdi kako je trodimenzionalnu kuglu moguće razrezati u konačno dijelova, te ih pomicanjem u prostoru presložiti u *dvije* kugle, od kojih je svaka identična početnoj! Stoga, ili moramo odustati od intuitivno jasnog i tehnički korisnog aksioma izbora ili moramo odustati od preambicioznog pridjeljivanja mjere svim skupovima. Ovaj potonji, uobičajeni izbor, zahtijeva od nas da prvo “proberemo” one skupove koji se “pristojno ponašaju” s obzirom na mjeru.

Definicija 5.1. Neka je X neprazan skup. Tada kažemo da je familija podskupova $\Sigma \subseteq \mathscr{P}(X)$ **σ-algebra** na skupu X ako je

(a) $\emptyset \in \Sigma$ i $X \in \Sigma$,

(b) Σ zatvorena s obzirom na komplement: $A \in \Sigma \;\Rightarrow\; X - A \in \Sigma$,

(c) Σ zatvorena s obzirom na prebrojive unije: $\{A_i\} \subseteq \Sigma \;\Rightarrow\; \cup_i A_i \in \Sigma$.

Elemente skupa Σ zovemo **izmjerivi skupovi** a uređen par (X,Σ) **izmjeriv prostor** (eng. *measurable space*).

Postoji jedan poseban odabir izmjerivih skupova na topološkim prostorima. Za podskup $B \subseteq X$ topološkog prostora X kažemo da je **Borelov skup** ako ga je moguće izraziti kombinacijom prebrojivih unija, prebrojivih presjeka i relativnih komplemenata otvorenih skupova. Familija Borelovih skupova na topološkom prostoru

tvori tzv. **Borelovu σ-algebru**. Na primjer, na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom Borelovi skupovi su svi otvoreni i zatvoreni skupovi, intervali oblika $\langle a, b]$ i $[a, b\rangle$, itd.

Definicija 5.2. Neka su (X, Σ_X) i (Y, Σ_Y) izmjerivi prostori. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ **izmjeriva** ako za svaki $A \in \Sigma_Y$ vrijedi $f^{-1}(A) \in \Sigma_X$.

Ako su $f, g : X \to \mathbb{R}$ imjerive funkcije, tada su zbroj $f + g$ i produkt fg izmjerive funkcije, a ako je $g \neq 0$, isto vrijedi i za omjer f/g.

Definicija 5.3. Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor. Za funkciju $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ kažemo da je **mjera** ako zadovoljava

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) *prebrojiva aditivnost*: za svaku prebrojivu familiju skupova $\{E_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ u parovima disjunktnih skupova $E_n \in \Sigma$, vrijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ . \tag{5.2}$$

Uređenu trojku (X, Σ, μ) zovemo **prostor mjere** (eng. *measure space*).

Lebesgueova mjera na skupu realnih brojeva: osnovna ideja …

$$\mu([a, b]) = \mu(\langle a, b\rangle) = \mu(\langle a, b]) = \mu([a, b\rangle) = b - a$$

Definicija 5.4. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Tada za skup $N \in \Sigma$ kažemo da je **skup mjere nula** ako je $\mu(N) = 0$. Za svojstvo koje vrijedi na svim točkama komplementa skupa mjere nula, odnosno na $X - N$, kažemo da vrijedi **gotovo svugdje** (koristimo pokratu "g.s.").

Skup mjere nula na skupu $\mathbb{R}$ je onaj koji se može pokriti s konačno ili prebrojivo mnogo intervala proizvoljno male ukupne duljine. Imamo niz primjera:

- Skupovi s konačno mnogo točaka.
- Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = \{q(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$; za dani $\epsilon > 0$ uvedemo intervale

  $$I_n = \Big[q(n) - \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \, , \, q(n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \Big] \ , \quad \ell(I_n) = \frac{\epsilon}{2^n}$$

  Unija ovih intervala pokriva skup $\mathbb{Q}$,

  $$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \ ,$$

a ukupna duljina im je proizvoljno malena jer

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \; .$$

- Prisjetimo se primjera Cantorov skupa 0.45: duljina skupa C_n u n-toj iteraciji je $\ell(C_n) = (2/3)^n$, odakle slijedi

$$\ell(C) = \lim_{n\to\infty} \ell(C_n) = \lim_{n\to\infty} (2/3)^n = 0 \; .$$

  Stoga, Cantorov skup, iako neprebrojiv je također skup mjere nula.

- Postoji li gust i neprebrojiv podskup realnih brojeva koji je skup mjere nula? Da, primjer je $C \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})$, gdje je C Cantorov skup.

Primjetimo, za funkciju koja je svugdje osim u jednoj točki nula, kao i Dirichletovu funkciju, možemo reći da su gotovo svugdje nula,

$$\chi_{\{a\}}(x) \overset{\text{gs}}{=} 0 \; , \quad \chi_{\mathbb{Q}}(x) \overset{\text{gs}}{=} 0$$

Digresija: **Lebesgueov kriterij integrabilnosti**. Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je Riemann integrabilna akko je f omeđena i skup prekida funkcije f ima mjeru 0.

Definicija 5.5. **Jednostavna funkcija** $\phi : X \to \mathbb{R}$ na izmjerivom prostoru (X, Σ) je funkcija oblika

$$\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n} \tag{5.3}$$

gdje su $N \in \mathbb{N}$, $\{c_1, \dots, c_N\} \subseteq \mathbb{R}$ i $\{E_1, \dots, E_N\} \subseteq \Sigma$.

Drugim riječima, kodomena jednostavne funkcije je konačan skup. Funkcija χ_E je izmjeriva akko je E izmjeriv skup i stoga su sve jednostavne funkcije izmjerive. Valja napomenuti da prikaz funkcije ϕ u (5.3) nije jedinstven; uobičajeno se koristi onaj u kom su konstante c_n međusobno različite, a skupovi E_n u parovima disjunktni.

Definicija 5.6. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $\phi : X \to [0, \infty\rangle$ nenegativna jednostavna funkcija, zapisana kao u (5.3) s $c_i \geq 0$ i $E_i \in \Sigma$. Tada definiramo integral funkcije ϕ s obzirom na mjeru μ preko

$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu \equiv \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i) \tag{5.4}$$

Ovdje koristimo konvenciju $0 \cdot \infty = 0$ u slučaju kada je $c_i = 0$ i $\mu(E_i) = \infty$.

Definicija 5.7. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f : X \to [0, \infty]$ nenegativna izmjeriva funkcija. Tada je Lebesgueov integral definiran s

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \equiv \sup \left\{ \int_X \phi \, \mathrm{d}\mu \mid 0 \le \phi \le f \,,\ \phi \text{ je jednostavna} \right\} \tag{5.5}$$

Primjetimo, Lebesgueov integral je dobro definiran za funkcije koje su gotovo svugdje nula i iznosi upravo nula, na primjer

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Nadalje, za izmjerive funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, upotrebom rastava

$$f = f^+ - f^- \,, \quad f^\pm = \max\{\pm f, 0\}$$

proširujemo gornju definiciju s

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu$$

uz pretpostavku da su oba integrala na desnoj strani konačni. Za integrabilne funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_X kf \, \mathrm{d}\mu = k \int_X f \, \mathrm{d}\mu \,, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int_X (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$$

a ako je $f(x) \le g(x)$ za svaki $x \in X$, tada vrijedi i

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

Komentar 5.8. Riemann vs Lebesgue. //

§ 5.2 Unitarni prostori

Definicija 5.9. **Vektorski prostor** (ili **linearni prostor**) nad poljem F (obično $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ skupa V i dvije operacije, $+ : V \times V \to V$ (zbrajanje vektora) i $\cdot : F \times V \to V$ (množenje skalarom), koje zadovoljavaju sljedeća svojstva za sve $a, b \in V$ i sve $\lambda, \kappa \in F$

1. $(V, +)$ je Abelova grupa,
2. kvaziasocijativnost, $\lambda \cdot (\kappa \cdot a) = (\lambda\kappa) \cdot a$,
3. postoji *jedinica* $1 \in F$, takva da je $1 \cdot a = a$,
4. distributivnost s obzirom na zbrajanje skalara, $(\lambda + \kappa) \cdot a = \lambda \cdot a + \kappa \cdot a$,
5. distributivnost s obzirom na zbrajanje vektora, $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$.

Kako bi smo ga razlikovali od nule u polju F, neutralni element u grupi $(V, +)$ ("nul-vektor") ćemo označavati s "θ". Imamo elementarno svojstvo,

$$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot u = \theta$$

Definicija 5.10. Neka je V vektorski prostor (ne nužno konačnodimenzionalan) nad poljem F ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). **Skalarni produkt** je preslikavanje

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to F$$

koje zadovoljava sljedeća svojstva

(a) hermitska komutativnost, $\langle v, u \rangle = (\langle u, v \rangle)^*$ za sve $u, v \in V$;

(b) kvaziasocijativnost, $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ za sve $u, v \in V$ i $\lambda \in F$;

(c) distributivnost, $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ za sve $u, v, w \in V$;

(d) pozitivna definitnost, $u \neq \theta \ \Rightarrow \ \langle u, u \rangle > 0$

Uređen par $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ koji se sastoji od vektorskog prostora V i skalarnog produkta na tom prostoru nazivamo **unitaran prostor** nad poljem F.

Napomena: iz svojstva (a) odmah slijedi da je $\langle u, u \rangle = \langle u, u \rangle^*$, pa je $\langle u, u \rangle$ nužno realan broj. Napomena: u matematičkoj literaturi se koristi obratna konvencija kod svojstva (b), $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

Teorem 5.11. *U unitarnom prostoru vrijedi*

$$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda^* \langle u, v\rangle \ , \quad \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad i \quad \langle u, u\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ u = \theta$$

DOKAZ :

$$\langle \lambda u, v\rangle = \langle v, \lambda u\rangle^* = (\lambda \langle v, u\rangle)^* = \lambda^* \langle v, u\rangle^* = \lambda^* \langle u, v\rangle$$

$$\langle u+v, w\rangle = \langle w, u+v\rangle^* = \langle w, u\rangle^* + \langle w, v\rangle^* = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

Ako je $\langle u, u\rangle = 0$, tada slijedi $u = \theta$ jer bi u protivnom $u \neq \theta$ povlačio $\langle u, u\rangle > 0$, kontradikcija s pretpostavkom! Obratno, ako je $u = \theta$, imamo

$$\langle u, u\rangle = \langle \theta, \theta\rangle = \langle 0u, \theta\rangle = 0 \langle u, \theta\rangle = 0$$

□

Primjeri:

- vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ s produktom

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x^\mathsf{T} y$$

- vektorski prostor $\mathbb{C}^n$ s produktom

$$\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k^* w_k = z^\dagger w$$

- vektorski prostor kvadratno sumabilnih nizova

$$\ell_2 = \Big\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ a_n \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \Big\}$$

s operacijama

$$(a_n) + (b_n) \equiv (a_n + b_n) \ , \quad \lambda(a_n) \equiv (\lambda a_n)$$

i skalarnim produktom

$$\langle (a_n), (b_n)\rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \, b_n$$

Dokaz da je posrijedi unitaran prostor. Uvodno, za svaki par kompleksnih brojeva $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$0 \leq (|z| - |w|)^2 \quad \Rightarrow \quad 2|z| \cdot |w| \leq |z|^2 + |w|^2$$

Stoga, koristeći nejednakost trokuta na skupu $\mathbb{C}$, imamo i

$$|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \leq 2(|z|^2 + |w|^2)$$

(a) Suma redova je dobro definirana.

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^2 \le 2 \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right) \le 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)$$

Suma s lijeve strane je, dakle, nepadajuća i odozgo ograničena, pa stoga i konvergentna.

(b) Produkt redova je dobro definiran.

$$\sum_{n=1}^{N} |\mathrm{Re}\,(a_n^*\, b_n)| \le \sum_{n=1}^{N} |a_n^* b_n| = \sum_{n=1}^{N} |a_n b_n| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right) \le \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)$$

i analogno za imaginaran dio. Sva ostala svojstva se jednostavno provjere …

Skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^3$ zadovoljava jednu elementarnu nejednakost,

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot |\cos\alpha| \le |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$$

gdje je α kut koji zatvaraju vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Sada nas zanima kako ovu nejednakost prevesti u apstraktni kontekst općenitih unitarnih prostora. Dokaz poopćene tvrdnje temelji se na sljedećoj opservaciji: nejednakost $(1 - \cos^2\alpha)\boldsymbol{a}^2 \ge 0$ možemo zapisati u obliku

$$\boldsymbol{a}^2 - 2\,\frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{b}^2} + \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{b}^2} \ge 0$$

odnosno

$$\left(\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\,\boldsymbol{b} \right)^2 \ge 0\,.$$

Teorem 5.12. **(nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunjakovskog)** *Neka je V unitaran prostor, te $a, b \in V$ bilo koji njegovi vektori. Tada vrijedi*

$$|\,\langle a, b\rangle\,|^2 \le \langle a, a\rangle \cdot \langle b, b\rangle \tag{5.6}$$

Pritom znak jednakosti vrijedi akko su vektori a i b linearno zavisni.

Dokaz : Ako je $b = \theta$ tada (5.6) postaje trivijalna jednakost. Pretpostavimo stoga da je $b \neq \theta$. Neka je $\lambda \in F$, te promotrimo $a - \lambda b \in V$. Vrijedi

$$\langle a - \lambda b,\, a - \lambda b\rangle \ge 0$$

Primjenom svojstava skalarnog produkta slijedi

$$\langle a, a\rangle - \lambda^* \langle b, a\rangle - \lambda\,\langle a, b\rangle + \lambda\lambda^* \langle b, b\rangle \ge 0$$

Odaberimo

$$\lambda = \frac{\langle b, a\rangle}{\langle b, b\rangle}$$

Kako je $b \neq \theta$, ovo je dobro definiran broj. Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo

$$\langle a,a\rangle - \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle}\,\langle b,a\rangle - \frac{\langle b,a\rangle}{\langle b,b\rangle}\,\langle a,b\rangle + \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle}\,\frac{\langle b,a\rangle}{\langle b,b\rangle}\,\langle b,b\rangle \geq 0$$

odnosno

$$\langle a,b\rangle\,\langle b,a\rangle \leq \langle a,a\rangle\,\langle b,b\rangle$$

iz čega, primjenom hermitske komutativnosti, slijedi tražena tvrdnja. Dokažimo drugi dio teorema. Neka su a i b linearno zavisni, odnosno $a = \lambda b$, uz $b \neq \theta$. Tada je

$$|\,\langle a,b\rangle\,|^2 = |\,\langle \lambda b,b\rangle\,|^2 = |\lambda\,\langle b,b\rangle\,|^2 = |\lambda|^2 \cdot |\,\langle b,b\rangle\,|^2 =$$

$$= \lambda\lambda^* \langle b,b\rangle\,\langle b,b\rangle = \langle \lambda b,\lambda b\rangle\,\langle b,b\rangle = \langle a,a\rangle\,\langle b,b\rangle$$

Drugim riječima, u (5.6) vrijedi jednakost. Obratno, pretpostavljajući da je $b \neq \theta$, polazeći od jednakosti u (5.6), te korištenjem obratnog postupka iz prvog dijela dokaza dolazimo do jednakosti

$$\langle a-\lambda b, a-\lambda b\rangle = 0\ ,$$

što povlači $a - \lambda b = \theta$, odnosno $a = \lambda b$. □

§ 5.3 Kvadratno integrabilne funkcije

Definicija 5.13. Neka je (X,Σ,μ) prostor mjere i $p \in [1,\infty\rangle$. Tada s $\mathscr{L}^p(X)$ označavamo skup izmjerivih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ takvih da je funkcija $|f|^p$ integrabilna,

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \tag{5.7}$$

Napomena: ovu je definiciju moguće jednostavno poopćiti na slučaj kompleksnih funkcija.

S obzirom da integral preko skupa mjere nula iščezava, ovdje uvodimo relaciju ekvivalencije $f \sim g$ akko $f \stackrel{\text{gs}}{=} g$, s kojom definiramo kvocijentne skupove

$$L^p(X) \equiv \mathscr{L}^p(X)/\!\sim$$

Nas će ovdje najviše zanimati $L^1(X)$, skup *apsolutno integrabilnih* funkcija, i $L^2(X)$, skup *kvadratno integrabilnih* funkcija, definiranima na $X \subseteq \mathbb{R}$.

Lema 5.14. *Neka je (X,Σ,μ) prostor mjere. Ako su $f, g \in L^2(X)$, tada je $fg \in L^1(X)$. Specijalno, ako je $\mu(X) < \infty$, uzimajući $g(x) = 1$ vidimo da je svaki $f \in L^2(X)$ nužno i $f \in L^1(X)$, ali općenito ne vrijedi obrat, odnosno $L^2(X) \subsetneq L^1(X)$.*

Dokaz : (skica) Općenito vrijedi

$$0 \leq (|f| - |g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2|fg|$$

odnosno

$$|f|^2 + |g|^2 \geq 2|fg| \geq |fg|$$

i stoga

$$\infty > \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g|^2 \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Protuprimjer za drugi dio tvrdnje: funkcija $f(x) = x^{-1/2}$ je element skupa $L^1(\langle 0, 1])$, ali ne i element skupa $L^2(\langle 0, 1])$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = 2 \, , \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x)\Big|_0^1 = \infty$$

□

Komentar 5.15. Ako je $\mu(X) = \infty$, tada *ne* vrijedi nužno $L^2(X) \subsetneq L^1(X)$. Na primjer, $1/x \in L^2([1, +\infty\rangle)$, ali $1/x \notin L^1([1, +\infty\rangle)$. //

Na svakom kvocijentnom skupu L^p možemo prirodno definirati operacije zbrajanja i množenja skalarom,

$$[f] + [g] \equiv [f + g] \, , \quad \lambda[f] \equiv [\lambda f]$$

Lako se provjeri kako ove definicije ne ovise o izboru reprezentanta klase ekvivalencije.

Teorem 5.16. *$L^2(X)$ s gore uvedenim operacijama je vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.*

Dokaz : (skica) Netrivijalni dio tvrdnje jest onaj da je operacija zbrajanja vektora dobro definirana. Koristeći nejednakost

$$|f + g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$$

slijedi

$$\int_X |f + g|^2 \, \mathrm{d}\mu \leq 2 \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu + 2 \int_X |g|^2 \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

□

Teorem 5.17. *Preslikavanje*

$$\langle f, g \rangle = \mathscr{N} \int_X f^* g \, \mathrm{d}\mu \tag{5.8}$$

je skalarni produkt na prostoru $L^2(X)$. Ovdje je $\mathscr{N}$ neka konvencionalna konstanta.

DOKAZ : Netrivijalni dio tvrdnje jest onaj da je ovaj produkt dobro definiran. Općenito vrijedi

$$|fg| = |f^* g| \geq \mathrm{Re}\,(f^* g) \quad \text{i} \quad |fg| = |f^* g| \geq \mathrm{Im}\,(f^* g)\ .$$

Kako prema Lemi 5.14 vrijedi $fg \in L^1([a,b])$, odavde slijedi

$$\infty > \int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu \geq \int_X \mathrm{Re}\,(f^* g)\,\mathrm{d}\mu\ ,$$

te

$$\infty > \int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu \geq \int_X \mathrm{Im}\,(f^* g)\,\mathrm{d}\mu\ .$$

□

Komentar 5.18. Ranije smo dokazali da $\langle u, u\rangle = 0$ povlači $u = \theta$. Valja imati na umu kako na L^p prostorima imamo jednakost $\overset{\text{gs}}{=}$, pa $\langle f, f\rangle = 0$ povlači $f \overset{\text{gs}}{=} 0$, a ne nužno $f = 0$. //

Nekoliko primjera:

- u kontekstu klasičnog Fourierovog reda najviše će nas zanimati prostor realnih $L^2([-\pi,\pi])$ funkcija sa skalarnim produktom

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

  Norma je odabrana tako da bi se izbjegli neki "iritantni" faktori u zapisu razvoja funkcija.

- u kvantnoj fizici koristimo produkt

$$\langle \psi, \phi\rangle = \int_a^b \psi(x)^* \phi(x)\,\mathrm{d}x$$

  definiran među kvadratno integrabilnim valnim funkcijama ψ i ϕ. Uobičajen je tzv. *bra-ket* zapis, $\langle\psi|\phi\rangle \equiv \langle\psi,\phi\rangle$.

Teorem 5.19. *$L^2([a,b])$ je beskonačnodimenzionalan vektorski prostor.*

DOKAZ : Dokazat ćemo da postoji beskonačno mnogo linerno nezavisnih kvadratno integrabilnih funkcija. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Podijelimo interval $[a,b]$ na n disjunktnih podintervala $\{I_1,\dots,I_n\}$, te definirajmo karakteristične funkcije

$$\chi_i(x) \equiv \chi_{I_i}(x)$$

Tvrdimo da su $\{\chi_1,\dots,\chi_n\}$ linearno nezavisne funkcije. Pretpostavimo suprotno, neka je

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i(x) = 0$$

za neki skup koeficijenata $\{c_1, \dots, c_n\}$, takvih da nisu svi jednaki nula. Neka je $c_j \neq 0$. Tada možemo pisati

$$\chi_j(x) = -\frac{1}{c_j} \sum_{i \neq j}^{n} c_i \chi_i(x)$$

Uvrštavanjem $x \in I_j$ dobivamo kontradikciju $1 = 0$. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo pronaći (konstruirati) n linearno nezavisnih funkcija na danom intervalu. Kako je n proizvoljno velik broj, slijedi tvrdnja. $\square$

§ 5.4 Norma na unitarnom prostoru

Definicija 5.20. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$. **Norma** vektora je preslikavanje $||\,.\,|| : V \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava naredna svojstva,

(a) pozitivna semidefinitnost, $||a|| \geq 0$,

(b) strogost, $||a|| = 0$ akko $a = \theta$,

(c) homogenost, $||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a||$, i

(d) nejednakost trokuta, $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$.

Uređen par $(V, ||\,.\,||)$ nazivamo **normiran vektorski prostor**.

Na primjer, na svakom vektorskom prostoru L^p (za $p \in \mathbb{R}^+$) možemo definirati sljedeću normu,

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

Nejednakost trokuta za ovu normu je posljedica tzv. *nejednakosti Minkowskog*, a ostala svojstva norme mogu se jednostavno provjeriti. U slučaju kada na vektorskom prostoru imamo definiran skalarni produkt, postoji prirodna definicija norme.

Teorem 5.21. *Neka je V unitaran prostor. Tada je preslikavanje*

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}\,, \tag{5.9}$$

gdje se podrazumijeva da je odabran pozitivan predznak u korijenu, norma na unitarnom prostoru V.

DOKAZ : Dijelovi (a), (b) i (c) slijede trivijalno iz definicije norme i svojstava skalarnog produkta, a ovdje ćemo dokazati dio (d). Koristeći elementarnu nejednakost

$$\mathrm{Re}(z) \leq |z|\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

te ranije dokazanu nejednakost SCB (5.6), imamo

$$||a+b||^2 = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle = ||a||^2 + ||b||^2 + 2\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) \leq$$
$$\leq ||a||^2 + ||b||^2 + 2\,|\,\langle a, b\rangle\,| \leq ||a||^2 + ||b||^2 + 2\,||a|| \cdot ||b|| = (||a|| + ||b||)^2$$

Dobili smo nejednakost među kvadratima nenegativnih realnih brojeva, pa uzimanjem korijena slijedi tražena nejednakost trokuta. □

Napomena: kod kvadratno integrabilnih funkcija ova "kanonska norma" se svodi na gore definiranu,

$$||f||_2 = \left(\int |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{L^2}}$$

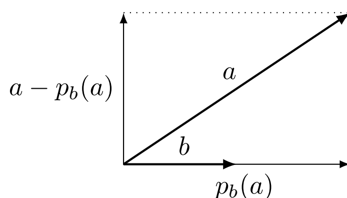
§ 5.5 Ortonormirani skupovi vektora

Definicija 5.22. Za skup vektora $\{v_i\} \subseteq V$ kažemo da je **ortogonalan** ako za svaki par $i \neq j$ vrijedi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Za skup vektora $\{e_i\} \subseteq V$ kažemo da je **ortonormiran** ako vrijedi $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Definicija 5.23. Zadana su dva vektora $a, b \in V$, takvi da je $a \neq \theta$ i $b \neq \theta$. Tada kažemo da je vektor

$$p_b(a) = \left\langle \frac{b}{||b||}\,,\, a \right\rangle \frac{b}{||b||} = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle b, b \rangle}\, b$$

ortogonalna projekcija vektora a na vektor b.



Odmah vidimo da vrijedi

$$\langle b, a - p_b(a) \rangle = \langle b, a \rangle - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle b, b \rangle} \langle b, b \rangle = 0$$

Drugim riječima, vektor a možemo rastaviti na sumu dva ortogonalna vektora,

$$a = p_b(a) + (a - p_b(a))$$

Općenito, ako je $W < V$ potprostor unitarnog prostora V razapet skupom ortonormiranih vektora $\{e_1, \dots, e_N\}$,

$$W = [\{e_1, \dots, e_N\}]$$

te $u \in V$ neki vektor, tada je

$$p_W(u) = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, u \rangle\, e_i$$

ortogonalna projekcija vektora u na potprostor W. Nadalje, vektor u možemo rastaviti na sumu dva ortogonalna vektora,

$$u = p_W(u) + (u - p_W(u))$$

Gram-Schmidtov postupak ortonormiranja. Ako je zadan skup vektora $\{v_k\}$, koji nije ortonormiran, tada možemo narednim postupkom konstruirati novi, ortonormiran skup vektora,

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} , \quad e_n' = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, v_n \rangle \, e_i , \quad e_n = \frac{e_n'}{||e_n'||}$$

Provjera indukcijom za $j < n$:

$$\langle e_j, e_n' \rangle = \langle e_j, v_n \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, v_n \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle e_j, v_n \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, v_n \rangle \, \delta_{ij} = 0$$

Gore opisanim postupkom, dakle, u svakom koraku od vektora v_n oduzimamo njegove ortogonalne projekcije na ostale, ranije ortonormirane vektore e_i.

Primjer: zadan je skup

$$\left\{1, x, x^2\right\} \subsetneq L^2([-1,1])$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$||f_1||^2 = \int_{-1}^{1} 1^2 \, \mathrm{d}x = 2 , \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_2 = f_2 - \langle e_1, f_2 \rangle \, e_1 = x - \left(\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}x \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = x$$

$$||g_2||^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3} , \quad e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \, x$$

$$g_3 = f_3 - \langle e_1, f_3 \rangle \, e_1 - \langle e_2, f_3 \rangle \, e_2 =$$

$$= x^2 - \left(\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}x \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} \, x \cdot x^2 \, \mathrm{d}x \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \, x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$||g_3||^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{45} , \quad e_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(3x^2 - 1 \right)$$

Lema 5.24. *Vrijedi*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \bigcup \left\{ \cos(nx), \sin(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subsetneq L^2([-\pi, \pi])$$

Ovaj skup funkcija je ortonormiran.

DOKAZ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}x = 0$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right)$$

Razlikujemo dva slučaja,

a) $m \neq n$

$$\langle \cos(mx),\, \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x) \big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin((m+n)x)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

b) $m = n \neq 0$

$$\langle \cos(nx),\, \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(1 + \cos(2nx)\big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi + \frac{\sin(2nx)}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 1$$

Analogno se pokaže za funkciju sin. Vidimo kako je pogodan odabir norme $\mathscr{N}$ uklonio potrebnu za dodatnim faktorima uz funkcije $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$. Za mješane produkte odmah imamo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

jer je posrijedi integral neparne funkcije na simetričnom intervalu; podsjetnik

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = |y = -x| = \int_{a}^{-a} f(-y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_{-a}^{a} f(-y)\,\mathrm{d}y = -\int_{-a}^{a} f(y)\,\mathrm{d}y$$

□

Teorem 5.25. *Za* konačan *ortonormiran skup vektora* $\{e_1, \ldots, e_N\} \subseteq V$ *unitarnog prostora* V *i svaki vektor* $u \in [\{e_1, \ldots, e_N\}]$ *vrijedi*

$$u = \sum_{k=1}^{N} \langle e_k, u \rangle\, e_k \quad i \quad ||u||^2 = \sum_{k=1}^{N} |\, \langle e_k, u \rangle \,|^2 \tag{5.10}$$

Dokaz : Po pretpostavci imamo

$$u = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j$$

Koristeći ortonormiranost vektora e_j, direktnim računom dobivamo

$$\langle e_k, u \rangle = \left\langle e_k, \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \delta_{kj} = \lambda_k$$

Nadalje,

$$||u||^2 = \langle u, u \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} \langle e_k, u \rangle\, e_k, \sum_{l=1}^{N} \langle e_l, u \rangle\, e_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{N} \langle e_k, u \rangle^* \, \langle e_l, u \rangle \, \langle e_k, e_l \rangle =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{N} \langle e_k, u \rangle^* \, \langle e_l, u \rangle \, \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{N} |\, \langle e_k, u \rangle \,|^2$$

□

Napomena: ova tvrdnja ne vrijedi nužno za *beskonačne* skupove vektora, jer je potrebno pretpostaviti još nešto pored ortonormiranosti skupa vektora (uskoro ćemo se pozabaviti pitanjem "potpunosti").

Teorem 5.26. (**Generaliziran Pitagorin poučak**) *Za konačan ortogonalan skup vektora* $\{v_1, \dots, v_N\} \subseteq V$ *unitarnog prostora* V *i proizvoljne kompleksne brojeve*

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subsetneq \mathbb{C}$$

vrijedi sljedeća jednakost

$$\Big|\Big|\sum_{k=1}^{N} \lambda_k v_k\Big|\Big|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2 ||v_k||^2 \tag{5.11}$$

Specijalno, za $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 1$ *imamo*

$$\Big|\Big|\sum_{k=1}^{N} v_k\Big|\Big|^2 = \sum_{k=1}^{N} ||v_k||^2 \tag{5.12}$$

DOKAZ : Koristimo matematičku indukciju. Slučaj $N = 1$ je trivijalan. Uvedimo oznaku

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k v_k$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za N i promotrimo

$$||\sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k v_k||^2 = ||\lambda_{N+1} v_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k v_k||^2 =$$

$$= \langle S_N + \lambda_{N+1} v_{N+1}, S_N + \lambda_{N+1} v_{N+1} \rangle = \langle S_N, S_N \rangle + \langle \lambda_{N+1} v_{N+1}, \lambda_{N+1} v_{N+1} \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(|\lambda_k|^2 ||v_k||^2 \right) + |\lambda_{N+1}|^2 ||v_{N+1}||^2 = \sum_{k=1}^{N+1} |\lambda_k|^2 ||v_k||^2$$

gdje smo kod treće jednakosti iskoristili ortogonalnost vektora v_{N+1} spram ostalih vektora u skupu. □

§ 5.6 Aproksimiranje vektora

Neka je V neki unitaran prostor i $u \in V$ neki njegov element. Pretpostavimo da je zadan potprostor $W < V$, razapet konačnim skupom vektora $\{e_1, \dots, e_N\}$,

$$W = [\{e_1, \dots, e_N\}]$$

Tražimo vektor $s \in W$, takav da je udaljenost $||u - s||$ minimalna. Drugim riječima, tražimo s kojim vektorom $s \in W$ je naš početni vektor u najbolje "aproksimiran". Tvrdimo da je taj vektor s upravo ortogonalna projekcija vektora u na potprostor W,

$$s = p_W(u) = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, u \rangle \, e_i$$

Naime, svaki drugi vektor $s' \in W$ možemo pisati u obliku $s' = s + r$, gdje je $r \in W$. Kako je vektor $u - s$ okomit na svaki vektor u potprostoru W, koristeći Pitagorin poučak imamo

$$||u - s'||^2 = ||u - (s + r)||^2 = ||(u - s) - r||^2 =$$

$$= ||u - s||^2 + ||r||^2 \geq ||u - s||^2$$

Dakle, za bilo koji drugi vektor s' ta udaljenost je veća ili jednaka, a jednakost se postiže samo ako je $||r||^2 = 0$, odnosno $r = \theta$ i stoga $s' = s$.

Komentar 5.27. Alternativno, možemo se poslužiti narednim postupkom

$$s = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i$$

$$||u - s||^2 = ||u||^2 + ||s||^2 - \langle u, s \rangle - \langle s, u \rangle =$$

$$= ||u||^2 + \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} \big(\lambda_i \, \langle u, e_i \rangle + \lambda_i^* \, \langle e_i, u \rangle \big)$$

Zahtijevamo

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \, ||u - s||^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_j^*} \, ||u - s||^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Odavde slijede dvije ekvivalentne jednakosti

$$\lambda_j^* = \langle u, e_j \rangle \quad \text{i} \quad \lambda_j = \langle e_j, u \rangle \ .$$

koje govore da je s upravo ortogonalna projekcija vektora u na potprostor W. Preostaje još provjera kako ovo rješenje uistinu predstavlja *minimum*, ali to ovdje nećemo raditi jer smo se u to već uvjerili gore. //

Komentar 5.28. Valja uočiti zašto norma $||.||_2$ na prostoru L^2 daje intuitivan pojam udaljenosti funkcija $f, g \in L^2$ pomoću veličine $||f - g||_2 \ldots$ //

§ 5.7 Parcijalni Fourierov red

Promotrimo vektorski prostor razapet pomoću konačnog dijela trigonometrijskog ortonormiranog skupa,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(Nx), \sin(Nx) \right\}$$

Ako sada proizvoljnu funkciju $f \in L^2([-\pi, \pi])$ želimo aproksimirati vektorom (funkcijom f_N) u ovom prostoru,

$$f_N(x) = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \;, \tag{5.13}$$

Običaj je konstantni član redefinirati pomoću $a_0 = \tilde{a}_0 \sqrt{2}$,

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \tag{5.14}$$

Koristeći rezultate prethodnog potpoglavlja, optimalan izbor koeficijenata je

$$\begin{aligned} a_n &= \langle \cos(nx), f(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) \, \mathrm{d}x \\ b_n &= \langle \sin(nx), f(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ovaj izbor jamči da je suma (5.14) najbliža aproksimacija danoj (kvadratno integrabilnoj) funkciji $f(x)$ u smislu norme na prostoru $L^2([-\pi, \pi])$.

Sada ćemo ovu konačnu sumu zapisati u nešto drugačijem obliku. Opći član možemo prebaciti u drugačiji oblik pomoću elementarnih trigonometrijskih relacija,

$$\begin{aligned} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(nt) \cos(nx) + \sin(nt) \sin(nx) \big) f(t) \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(t-x)) f(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(t-x)) f(t) \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(n(t-x)) \right) f(t) \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t-x) f(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

gdje smo uveli tzv. **Dirichletovu jezgru**

$$D_N(x) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$$

Lema 5.29. *Za $x \neq 0$ vrijedi*

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2\sin(x/2)} \tag{5.16}$$

a $D_N(0) = N + \frac{1}{2}$.

DOKAZ : Za $x \neq 0$:

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} e^{-inx}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} e^{inx} = \frac{e^{i(N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} - 1 = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(N+1/2)x} - e^{ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} =$$

$$= \frac{e^{i(N+1/2)x} - e^{ix/2}}{2i\sin(x/2)}$$

i analogno

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-inx} = \frac{e^{-i(N+1/2)x} - e^{-ix/2}}{-2i\sin(x/2)}$$

Sve skupa imamo

$$D_N(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2i\sin(x/2)}\left(2i\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right) - 2i\sin(x/2)\right)\right)$$

odakle odmah slijedi tražena tvrdnja. □

Gibbsov fenomen. Promotrimo kako se ponaša parcijalni Fourierov red u blizini prekida (diskontinuiteta) funkcije. Za primjer ćemo uzeti funkciju $f \in L^2([-\pi, \pi])$, definiranu s

$$f(x) = \begin{cases} -h\,, & x \in [-\pi, 0\rangle \\ h\,, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

za neki $h > 0$. Koristeći zapis pomoću Dirichletove jezgre, imamo

$$f_N(x) = \frac{h}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(t - x))}{2\sin((t - x)/2)}\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(t - x))}{2\sin((t - x)/2)}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(t - x))}{2\sin((t - x)/2)}\,\mathrm{d}t = |t' = -t| = \int_{\pi}^{0} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(-t' - x))}{2\sin((-t' - x)/2)}\,(-\mathrm{d}t') =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(t' + x))}{2\sin((t' + x)/2)}\,\mathrm{d}t'$$

Sada ćemo u prvom integralu uvesti varijablu $y = t - x$, a u drugom $y = t' + x$,

$$f_N(x) = \frac{h}{2\pi}\left(\int_{-x}^{\pi-x} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(y/2)}\,\mathrm{d}y - \int_{x}^{\pi+x} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(y/2)}\,\mathrm{d}y\right)$$

Imamo, dakle, jednake podintegralne funkcije i prilikom integracije se poništi dio između x i $\pi - x$,

$$\int_{-x}^{\pi-x} - \int_{x}^{\pi+x} = \int_{-x}^{x} + \int_{x}^{\pi-x} - \int_{x}^{\pi-x} - \int_{\pi-x}^{\pi+x} = \int_{-x}^{x} - \int_{\pi-x}^{\pi+x}$$

pa preostaje

$$f_N(x) = \frac{h}{2\pi}\left(\int_{-x}^{x} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(y/2)}\,\mathrm{d}y - \int_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(y/2)}\,\mathrm{d}y\right)$$

Kako nas zanima dio oko prekida, promotrit ćemo limes kada $x \to 0$ (drugim riječima, zanima nas slučaj kada je $0 < x \ll \pi$). Tvrdimo da drugi integral, u limesu malog x i velikog N, trne brže od prvog,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(y/2)} = (2N+1)\lim_{y\to 0} \frac{\cos((N+\frac{1}{2})y)}{\cos(y/2)} = 2N+1$$

$$\lim_{y\to \pi} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(y/2)} = \sin\Big(\big(N+\frac{1}{2}\big)\pi\Big) = \cos(N\pi)\sin(\pi/2) = (-1)^N$$

Sada koristimo supstitucije

$$\xi = py\,, \quad p = N + \frac{1}{2}$$

$$f_N(x) \approx \frac{h}{\pi}\int_0^{px} \frac{\sin\xi}{\sin(\xi/2p)}\,\frac{d\xi}{p}$$

Zanima nas lokalni maksimum funkcije $f_N(x)$ (za $x \approx 0$),

$$\frac{df_N(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{px} q(\xi)\,d\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(Q(px) - Q(0)\big) = p\,q(px)$$

Dakle,

$$p\,\frac{\sin(px)}{\sin(x/2)} = 0 \;\Rightarrow\; x_{\max} = \frac{\pi}{p}$$

Kako se povećava broj članova N, povećava se i parametar p, pa se položaj maksimuma pomiče prema $x = 0$. Na položaju maksimuma imamo

$$f_N(x_{\max}) \approx \frac{h}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\xi}{\sin(\xi/2p)}\,\frac{d\xi}{p}$$

Kako je

$$\sin(\xi/2p) = \xi/2p + O((\xi/2p)^2)\,,$$

za $p \gg 1$ možemo napraviti dodatnu aproksimaciju

$$f_N(x_{\max}) \approx \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi$$

Integral koji se ovdje pojavljuje poznat je kao Wilbraham-Gibbsova konstanta,

$$G = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi = 1.17897\ldots$$

$$f_N(x_{\max}) \approx Gh$$

Vidimo da je relativno odstupanje parcijalnog Fourierovog reda uvijek prisutno, dok god imamo *konačnu* sumu. Usput, opravdanje gornjih aproksimacija: numeričkim računom dobijemo da je razlika

$$G - \frac{1}{p\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\xi}{\sin(\xi/2p)}\, d\xi$$

reda veličine $\sim 10^{-3}$ za $N = 10$, $\sim 10^{-5}$ za $N = 100$, itd.

§ 5.8 Potpunost

Definicija 5.30. Neka je V normiran vektorski prostor. Za niz vektora

$$(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$$

kažemo da je

- **konvergentan** ako postoji $v \in V$, takav da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ sa svojstvom
$$\forall\, i > N \;:\; ||v_i - v|| < \epsilon$$
- **Cauchyjev niz** ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ sa svojstvom
$$\forall\, i, j > N \;:\; ||v_i - v_j|| < \epsilon$$

Cauchyjev niz ne mora nužno konvergirati u dotičnom vektorskom prostoru, primjer su nizovi racionalnih brojeva koji konvergiraju k nekom iracionalnom broju.

Definicija 5.31. Normiran vektorski prostor V je **potpun** ako svaki Cauchyjev niz konvergira unutar V. Potpun normiran vektorski prostor zovemo **Banachov prostor**. Potpun unitaran prostor, pri čemu je potpunost definirana s obzirom na normu induciranu skalarnim produktom, nazivamo **Hilbertov prostor**.

Napomena: studenti često zapamte pogrešnu definiciju: "Hilbertov prostor je beskonačnodimenzionalan vektorski prostor". Ovo, međutim, općenito nije točno: postoje konačnodimenzionalni Hilbertovi prostori (štoviše, može se pokazati da su svi konačnodimenzionalni unitarni prostori Hilbertovi prostori), kao i beskonačnodimenzionalni unitarni prostori koji nisu Hilbertovi!

Teorem 5.32. *Svi prostori L^p su potpuni.*

DOKAZ : Vidi Dodatak. □

Napomena: kada bismo koristili definiciju integrala po Riemannu, prostor L^2 ne bi bio potpun! Na primjer, uzmimo skup racionalnih brojeva

$$\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,,$$

te označimo s $\mathbb{Q}_N$ skup "prvih" N racionalnih brojeva

$$\mathbb{Q}_N = \{q_1, \dots, q_N\}$$

Tada je $\chi_{\mathbb{Q}_N} \in L^2$ za svaki $N \in \mathbb{N}$. Nadalje, $(\chi_{\mathbb{Q}_N})_{N\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u L^2, ali njegov formalni limes, funkcija $\chi_{\mathbb{Q}}$, nije kvadratno integrabilna po Riemannu!

Sada nas zanima što možemo reći o razvoju nekog vektora u unitarnom prostoru pomoću nekog ortonormiranog skupa vektora. Za početak ćemo vidjeti koja je "najjača" tvrdnja s kojom raspolažemo prije nego što se pozovemo na potpunost.

Teorem 5.33. *Neka je $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ ortonormiran skup vektora unitarnog prostora V, te $u \in V$. Tada vrijedi tzv.* **Besselova nejednakost**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, u\rangle|^2 \le ||u||^2 \tag{5.17}$$

gdje je (formalna) suma s lijeve strane nejednakosti konvergentna.

DOKAZ : Za svaki $N \in \mathbb{N}$ definiramo parcijalnu sumu S_N i projekciju vektora u na potprostor razapet s prvih N vektora promatranog ortonormiranog skupa,

$$S_N \equiv \sum_{k=1}^{N} |\langle u, e_k\rangle|^2 \,, \quad u_N \equiv \sum_{k=1}^{N} \langle e_k, u\rangle\, e_k$$

Koristeći rastav $u = (u - u_N) + u_N$ i Pitagorin poučak, imamo

$$||u||^2 = ||u - u_N||^2 + ||u_N||^2$$

odnosno

$$||u_N||^2 \le ||u||^2$$

Također, iz Teorema 5.25 znamo da je $S_N = ||u_N||^2$, pa je

$$S_N \le ||u||^2$$

za svaki $N \in \mathbb{N}$. Kako je i $S_N \leq S_{N+1}$ za svaki $N \in \mathbb{N}$, pa imamo rastući, odozgo omeđen niz realnih brojeva

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq ||u||^2$$

Stoga, limes $\lim_{N\to\infty} S_N$ postoji i vrijedi Besselova nejednakost. □

Direktna posljedica ovog teorema je naredni korolar.

Lema 5.34. (**Riemann-Lebesgueova lema**) *Neka je $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ ortonormiran skup vektora unitarnog prostora V, te $u \in V$. Tada vrijedi*

$$\lim_{k\to\infty} \langle e_k, u\rangle = 0 \tag{5.18}$$

Dokaz : Iz dokazane konvergentnosti reda u prethodnom Teoremu znamo da je

$$\lim_{k\to\infty} |\langle e_k, u\rangle|^2 = 0$$

odakle slijedi lema. □

Primjer u sklopu Fourierovog reda, $V = L^2([-\pi, \pi])$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \cos(nx), f(x)\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \sin(nx), f(x)\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Definicija 5.35. Neka je V unitaran prostor i $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ (beskonačan) ortonormiran skup vektora. Kažemo da je skup vektora $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ **potpun** ako za svaki $u \in V$ imamo

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, u\rangle\, e_k$$

Drugim riječima, niz $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ definiran s

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} \langle e_k, u\rangle\, e_k$$

konvergira k vektoru u,

$$\lim_{N\to\infty} ||u - u_N|| = 0$$

Kasnije ćemo se uvjeriti kako je skup

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \bigcup \left\{\cos(nx), \sin(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

potpun na prostoru $L^2([-\pi, \pi])$.

Teorem 5.36. *Ortonormiran skup vektora $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ unitarnog prostora V je potpun akko vrijedi*

$$||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, u\rangle|^2 \tag{5.19}$$

za svaki $u \in V$, drugim riječima, akko vrijedi jednakost u Besselovoj nejednakosti.

DOKAZ : Kao i kod dokaza Besselove nejednakosti imamo

$$||u||^2 = ||u - u_N||^2 + ||u_N||^2$$

Ako je skup vektora $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ potpun, tada imamo

$$0 = \lim_{N\to\infty} ||u - u_N||^2 = \lim_{N\to\infty} \left(||u||^2 - ||u_N||^2\right)$$

odnosno,

$$||u||^2 = \lim_{N\to\infty} ||u_N||^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\langle e_k, u\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, u\rangle|^2$$

gdje smo koristili ortonormiranost skupa vektora $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Obratno, pretpostavljajući gornju jednakost, obratnim slijedom zaključivanja slijedi potpunost. □

Teorem 5.37. (**Parsevalov teorem**) *Neka je V unitaran prostor i $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ ortonormiran potpun skup vektora. Tada za sve $u, v \in V$ vrijedi*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k\rangle \langle e_k, v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \, b_k \,, \tag{5.20}$$

gdje su $a_k = \langle e_k, u\rangle$ i $b_k = \langle e_k, v\rangle$. Specijalno, vrijedi tzv. **Parsevalova jednakost**

$$||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \tag{5.21}$$

DOKAZ : Koristeći parcijalne sume

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \,, \quad v_N = \sum_{l=1}^{N} b_l e_l \,,$$

imamo

$$\langle u_N, v_N\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} a_k e_k, \sum_{l=1}^{N} b_l e_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{N} a_k^* \, b_l \, \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{N} a_k^* \, b_k$$

Još trebamo pokazati da $\langle u_N, v_N\rangle \to \langle u, v\rangle$ kada $N \to \infty$. Koristeći nejednakost trokuta na skupu $\mathbb{C}$ i SCB nejednakost imamo

$$|\langle u,v\rangle - \langle u_N, v_N\rangle| = |(\langle u,v\rangle - \langle u, v_N\rangle) + (\langle u, v_N\rangle - \langle u_N, v_N\rangle)| \leq$$
$$\leq |\langle u, v - v_N\rangle| + |\langle u - u_N, v_N\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v - v_N|| + ||v_N|| \cdot ||u - u_N|| \leq$$
$$\leq ||u|| \cdot ||v - v_N|| + ||v|| \cdot ||u - u_N||$$

Odavde, korištenjem potpunosti skupa vektora $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ slijedi tvrdnja. □

Napomena: Parsevalov teorem povezuje norme u prostorima L_2 i ℓ_2.

Fizikalna interpretacija Parsevalove jednakosti: ukupna energija jednaka je sumi energija pojedinih harmonika. Na primjer, ako je električni uređaj otpora R spojen na vanjski, vremenski periodičan napon $V(t)$ (osnovnog perioda T), tada je energija koja se troši u jednom periodu jednaka

$$E = \frac{1}{R}\int_0^T |V(t)|^2\,\mathrm{d}t = ||V||^2$$

S druge strane, Parsevalova jednakost nam govori kako je ova energija jednaka zbroju energija svih pojedinih komponenti Fourierovog razvoja napona $V(t)$.

§ 5.9 Usporedba tri tipa konvergencije

Definicija 5.38. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : S \to \mathbb{R}$. Tada kažemo da ovaj niz

(a) **konvergira po točkama** k funkciji $f : S \to \mathbb{R}$ ako za svaki $\epsilon > 0$ i svaki $x \in S$ postoji $N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$, takav da je

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \tag{5.22}$$

za svaki $n > N(x, \epsilon)$;

(b) **uniformno konvergira** k funkciji $f : S \to \mathbb{R}$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, takav da je

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \tag{5.23}$$

za svaki $n > N(\epsilon)$ i svaki $x \in S$. Primjetimo, ovdje je $N = N(\epsilon)$ (jednak za sve točke na S);

(c) **konvergira u srednjem** k funkciji $f : S \to \mathbb{R}$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, takav da je

$$||f(x) - f_n(x)|| < \epsilon\ . \tag{5.24}$$

za svaki $n > N(\epsilon)$ s obzirom na neku normu $||\,.\,||$. Ponekad se koristi i fraza "konvergira u normi" ili "jako konvergira".

Slikovito govoreći, konvergencija po točkama je u potpunosti "lokalna", konvergencija u srednjem u potpunosti "globalna", dok uniformna konvergencija stoji negdje između.

Iz definicije odmah slijedi da svaki niz funkcija koji konvergira uniformno nužno konvergira i po točkama. Također, pokazat ćemo da uniformna konvergencija niza funkcija na intervalu konačne duljine povlači konvergenciju u srednjem. Obrati ove dvije tvrdnje, međutim, ne vrijede, kao što pokazuje primjer niza funkcija

$$f_n : [0, 1\rangle \to \mathbb{R}\ , \quad f_n(x) = x^n\ .$$

Naime, po točkama imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ ,$$

a u srednjem

$$||f_n - 0||^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - 0|| = 0$$

Međutim, za svaki $0 < \epsilon < 1$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $x_0 \in [0, 1\rangle$ za koji vrijedi

$$|f_{N+1}(x_0) - 0| > \epsilon$$

Konkretno, ovo vrijedi za svaki

$$\epsilon^{\frac{1}{N+1}} < x_0 < 1$$

pa dotični niz funkcija ne konvergira uniformno. Sličan primjer je i $f_n(x) = x/n$.

Teorem 5.39. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n \in L^p([a,b])$, $p > 0$, koje uniformno konvergiraju. Tada ovaj niz konvergira i u srednjem.*

Dokaz : Po pretpostavci za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N(\epsilon)$ takav da je

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

za svaki $n > N(\epsilon)$ i svaki $x \in [a,b]$. Tada je

$$||f_n - f||^p = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x < (b-a)\epsilon^p \equiv \tilde{\epsilon}^{\,p}$$

Stoga, za svaki $\tilde{\epsilon} > 0$ postoji $N(\tilde{\epsilon}) = N(\epsilon)$, takav da je

$$||f_n - f|| < \tilde{\epsilon}$$

za svaki $n > N(\tilde{\epsilon})$. □

Funkcije $f_n(x) = n\chi_{\langle 0,1/n\rangle}$ (za $n \in \mathbb{N}$) konvergiraju po točkama u $f(x) = 0$ (za sve $x \in \mathbb{R}$), ali ne konvergiraju u srednjem,

$$||f_n - 0||_p = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = n^{1-\frac{1}{p}}$$

Dakle, za svaki $p > 1$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - 0||_p = \infty$$

S druge strane, imamo tzv. "typewriter sequence" ("niz pisaćeg stroja"),

$$f_n(x) = \chi_{\left[\frac{n-2^k}{2^k},\, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]}$$

gdje je $k \geq 0$ (k je samo pomoćni parametar) i $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ovo je niz karakterističnih fukcija čiji se neiščezavajući intervali smanjuju u veličini i "marširaju" po intervalu $[0,1]$.

$$k = 0 \,, \quad n = 1 \;:\; \chi_{[0,1]}$$

$$k = 1 \,, \quad n = 2,3 \;:\; \chi_{[0,1/2]},\, \chi_{[1/2,1]}$$

$$k = 2 \,, \quad n = 4,5,6,7 \;:\; \chi_{[0,1/4]},\, \chi_{[1/4,2/4]},\, \chi_{[2/4,3/4]},\, \chi_{[3/4,1]}$$

Ovaj niz ne konvergira po točkama (u svakoj točki domene $f_n(x)$ ima dva gomilišta, 0 i 1), ali konvergira u srednjem,

$$||f_n - 0||_p = 2^{-k/p} \,, \quad \lim_{n\to\infty} ||f_n - 0||_p = 0$$

§ 5.10 Konvergencija Fourierovog reda

Ono što nas za početak zanima jest prikaz *periodičnih* funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, s osnovnim periodom $P = 2\pi$, pomoću reda trigonometrijskih funkcija $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$. Konvencionalno, ovakvu funkciju možemo zadati na intervalu $[-\pi, \pi\rangle$. S obzirom da promatramo funkcije $f \in L^2([-\pi, \pi])$, podrazumijevat ćemo da je uvijek $f(-\pi) = f(\pi)$. Ovo, međutim, ne znači da je nužno

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} f(-\pi + \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(\pi - \epsilon) \ ,$$

jer funkcija f u toj točki može imati prekid!

Definicija 5.40. Klasičan Fourierov red funkcije $f \in L^2([-\pi, \pi])$ je funkcija $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definirana s

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \tag{5.25}$$

gdje su koeficijenti a_n i b_n dani s

$$\begin{aligned} a_n &= \langle f(x), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x \\ b_n &= \langle f(x), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.26}$$

za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

U slučaju kada imamo funkciju čiji je osnovni period period $P \neq 2\pi$ …

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \bigcup \left\{ \cos\left(\frac{2\pi n}{P} \, x \right), \, \sin\left(\frac{2\pi n}{P} \, x \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2([-P/2, P/2])$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{P} \, x \right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{P} \, x \right) \tag{5.27}$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{P} \, x \right) \mathrm{d}x \ , \quad b_n = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{P} \, x \right) \mathrm{d}x \tag{5.28}$$

Teorem 5.41. *Neka je $f \in L^2([-\pi, \pi])$ i*

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{5.29}$$

Tada je $f_N \in L^2([-\pi, \pi])$ za svaki $N \in \mathbb{N}$, te

$$\lim_{N \to \infty} ||f - f_N||^2 = 0$$

Drugim riječima, razlika između $\tilde{f} = f_\infty$ i f može postojati samo na skupu mjere nula.

DOKAZ : (Skica): prvo dokažemo da je svaku funkciju $f \in L^2$ moguće proizvoljno dobro (uniformno) aproksimirati neprekidnom funkcijom $g \in L^2$ (ovdje se koriste Fejérovi rezultati),

$$||f - g|| < \epsilon/2$$

a onda iz Weierstraßovog teorema slijedi da je funkciju g moguće proizvoljno dobro (uniformno) aproksimirati trigonometrijskim polinomom P_N,

$$||g - P_N|| < \epsilon/2$$

Valja uočiti kako je svaki trigonometrijski polinom moguće prikazati kao polinom funkcija $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$. Kako je parcijalna Fourierova suma najbolja aproksimacija, odave slijedi rezultat

$$||f - f_N|| \le ||f - P_N|| = ||(f - g) + (g - P_N)|| \le ||f - g|| + ||g - P_N|| < \epsilon$$

□

Napomena: valja uočiti kako je ova tvrdnja ekvivalentna tvrdnji potpunosti ortonormiranog skupa trigonometrijskih funkcija $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$ na prostoru $L^2([-\pi, \pi])$.

Definicija 5.42. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ kažemo da je **neprekidna u točki** $x_0 \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Nadalje, kažemo da je funkcija f **neprekidna na skupu** S ako je neprekidna u svakoj točki $x \in S$, odnosno da je **neprekidna po dijelovima na skupu** S ako je na svakom konačnom intervalu $[b, c] \subseteq S$ neprekidna izuzev u konačno mnogo točaka, te ako u svakoj točki prekida $a \in S$ postoje limesi

$$f(a + 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(a + \epsilon) \quad \text{i} \quad f(a - 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(a - \epsilon)\ .$$

Alternativne oznake: $f(a_+)$ umjesto $f(a + 0)$, te $f(a_-)$ umjesto $f(a - 0)$.

Napomena: valja uočiti ako su sve neprekidne, kao i po dijelovima neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nužno omeđene, $|f| < M$, a stoga i kvadratno integrabilne.

Definicija 5.43. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ definiramo **desnu** i **lijevu derivaciju** u točki $x \in S$ pomoću narednih limesa,

$$f'(x+0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(x+\epsilon) - f(x+0)}{\epsilon}, \quad f'(x-0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(x-0) - f(x-\epsilon)}{\epsilon}$$

Primjer:

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & -\pi \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x\,, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

$$f\big(\frac{\pi}{2} + 0\big) = f\big(\frac{\pi}{2} - 0\big) = \frac{\pi}{2}$$

$$f'\big(\frac{\pi}{2} + 0\big) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(\frac{\pi}{2} + \epsilon) - f(\frac{\pi}{2} + 0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\pi - (\frac{\pi}{2} + \epsilon) - \frac{\pi}{2}}{\epsilon} = -1$$

$$f'\big(\frac{\pi}{2} - 0\big) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(\frac{\pi}{2} - 0) - f(\frac{\pi}{2} - \epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \epsilon)}{\epsilon} = 1$$

Lema 5.44. *Neka je $f \in L^2([-\pi, \pi])$ po dijelovima neprekidna funkcija, takva da u nekoj točki $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ postoje limesi $f(x \pm 0)$ i $f'(x \pm 0)$. Tada vrijedi*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) D_N(t)\, \mathrm{d}t = \frac{f(x+0)}{2}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_N(t)\, \mathrm{d}t = \frac{f(x-0)}{2}$$

Dokaz : Koristeći činjenicu da je Dirichletova jezgra parna funkcija, integriranjem odmah dobivamo

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_N(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Za promatranu točku x definiramo po dijelovima neprekidne funkcije

$$g : \langle 0, \pi] \to \mathbb{R}\,, \quad g(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2\sin(t/2)}\,,$$

$$h : [-\pi, 0\rangle \to \mathbb{R}\,, \quad h(t) = \frac{f(x-0) - f(x+t)}{2\sin(t/2)}\,.$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} g(0+\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x+0)}{\epsilon} \frac{\epsilon}{2\sin(\epsilon/2)} = f'(x+0)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} h(0-\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x-0) - f(x-\epsilon)}{\epsilon} \frac{\epsilon}{2\sin(-\epsilon/2)} = -f'(x-0)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) D_N(t)\, \mathrm{d}t - \frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+0)) D_N(t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2\sin(t/2)\, g(t) D_N(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)t\Big)\, \mathrm{d}t$$

Funkciju g možemo proširiti funkcijom $\hat{g} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} g(t)\,, & 0 < t \le \pi \\ 0\,, & -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

Kako je g po dijelovima neprekidna funkcija na intervalu $[0, \pi]$, slijedi i da je $\hat{g}$ po dijelovima neprekidna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, pa je $\hat{g} \in L^2([-\pi, \pi])$. Nadalje, kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\hat{g}(t)\cos(t/2)|^2 \,\mathrm{d}t \le \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{g}(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\hat{g}(t)\sin(t/2)|^2 \,\mathrm{d}t \le \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{g}(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$$

vrijedi i $\hat{g}(t)\cos(t/2) \in L^2([-\pi, \pi])$, te $\hat{g}(t)\sin(t/2) \in L^2([-\pi, \pi])$. Konačno, koristeći Riemann-Lebesgueovu lemu sada slijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(t) \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(t) \Big(\sin(Nt)\cos(t/2) + \cos(Nt)\sin(t/2) \Big) \,\mathrm{d}t = 0$$

čime je dokaza prva tvrdnja. Druga tvrdnja se dokaže potpuno analogno, koristeći funkciju h.

□

Teorem 5.45. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična, po dijelovima neprekidna funkcija, te derivabilna s lijeva i s desna u točki x. Tada Fourierov red funkcije f u točki x konvergira k vrijednosti*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Specijalno, ako je funkcija f, koja zadovoljava gore navedena svojstva, neprekidna u točki x, onda Fourierov red funkcije f u točki x konvergira k vrijednosti $f(x)$.

Dokaz :

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_N(u - x)\, du = |t = u - x| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t + x) D_N(t) \,\mathrm{d}t$$

Općenito, za svaku funkciju $p(x)$ perioda P, te $a \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_P^{P+a} p(x) \,\mathrm{d}x = |y = x - P| = \int_0^a p(y) \,\mathrm{d}y = \int_0^a p(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^{P+a} p(x) \,\mathrm{d}x = \Big(\int_0^P - \int_0^a + \int_P^{P+a} \Big) p(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^P p(x) \,\mathrm{d}x$$

Kako su i f i D_N funkcije perioda 2π, isto vrijedi i za njihov produkt, pa je

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x) D_N(t) \,\mathrm{d}t$$

Koristeći Lemu 5.44 odmah imamo

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x) D_N(t) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t + x) D_N(t) \,\mathrm{d}t + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t + x) D_N(t) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

□

Primjer: $f \in L^2([-\pi, \pi])$

$$f(x) = \begin{cases} A\,, & x \in [-\pi, 0\rangle \\ B\,, & x \in [0, \pi\rangle \end{cases}$$

Za $n \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} A\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} B\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(A\,\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + B\,\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right) = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\pi A + \pi B\right) = A + B$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} A\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} B\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(A\,\frac{(-1)^n - 1}{n} + B\,\frac{1-(-1)^n}{n}\right) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n}\,(B - A)$$

Dakle,

$$\tilde{f}(x) = \frac{A+B}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(B-A)}{\pi(2k+1)}\,\sin((2k+1)x)$$

$$\tilde{f}(0) = \frac{A+B}{2}$$

Teorem 5.46. *Ako je $f \in L^2([-\pi, \pi])$ neprekidna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, vrijedi*

$$f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$$

te je f' po dijelovima neprekidna funkcija, tada Fourierov red funkcije f konvergira uniformno k funkciji f na intervalu $[-\pi, \pi]$.

DOKAZ : Kako je po pretpostavci f' po dijelovima neprekidna funkcija, vrijedi

$$f' \in L^2([-\pi, \pi])$$

Pronađimo sada Fourierov razvoj funkcije f',

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\cos(nx) f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x)\,\mathrm{d}x\right) = nb_n$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\sin(nx) f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x\right) = -na_n$$

$$\widetilde{f'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n\cos(nx) - na_n\sin(nx)$$

Parsevalov identitet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n'|^2 + |b_n'|^2 = ||f'||^2 < \infty$$

odakle slijedi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

konvergira. Sada ćemo dokazati da i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

konvergira. Naime, koristeći vektore $u_N, v_N \in \mathbb{R}^N$

$$u_N = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{N}\right), \quad v_N = \left(\sqrt{|a_1'|^2 + |b_1'|^2}, \ldots, \sqrt{|a_N'|^2 + |b_N'|^2}\right)$$

i SCB nejednakost, imamo

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sqrt{|a_n'|^2 + |b_n'|^2} = |\langle u_N, v_N \rangle| \le ||u_N|| \cdot ||v_N|| =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n'|^2 + |b_n'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Odavde slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n'|^2 + |b_n'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nadalje, koristeći činjenicu da je

$$|a_n| \le \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \quad \text{i} \quad |b_n| \le \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}\,,$$

slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} < \infty$$

Prisjetimo se Weierstraßovog M-testa uniformne konvergencije niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcija $f_n : S \to \mathbb{C}$ na $S \subseteq \mathbb{C}$: ako za svaku funkciju f_n postoji realan broj $M_n > 0$, takav da je $|f_n(x)| \le M_n$ (za svaki $x \in S$), te red $\sum_n M_n$ konvergira, tada red $\sum_n f_n$ konvergira uniformno na S. Odavde, zbog

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \le |a_n \cos(nx)| + |b_n \sin(nx)| \le |a_n| + |b_n|$$

slijedi da Fourierov red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

konvergira uniformno na intervalu $[-\pi, \pi]$. □

Napomena: ako funkcija ima prekid, tada se u njegovoj blizini javlja Gibbsov fenomen i on je u pozadini toga što pripadni Fourierov red ne konvergira uniformno.

§ 5.11 Sumiranje redova pomoću Fourierovog reda

Napomena:

$$\tilde{a}_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, f \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle 1, f\rangle\ , \quad a_0 = \langle 1, f\rangle\ , \quad |\tilde{a}_0|^2 = \frac{|a_0|^2}{2}$$

pa Parsevalova jednakost u slučaju Fourierovog reda glasi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Primjer: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, gdje je $f(x) = x$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \{u = x\,,\ dv = \sin(nx)\,\mathrm{d}x\} = \\ = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\,\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) &= \\ = \frac{1}{\pi}\left(-2\,\frac{\pi}{n}\,(-1)^n + \frac{1}{n^2}\,\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) &= \frac{2}{n}\,(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\,(-1)^{n+1}\sin(nx)$$

Parseval,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Primjer: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x < \pi \\ -x\,, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

Za $n > 0$: $b_n = 0$, te

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\,\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\,\cos(nx)\Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}\,\big((-1)^n - 1\big)$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

Funkcija $f(x)$ je neprekidna, pa je

$$\tilde{f}(0) = f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

odnosno

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Primjer: $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, gdje je $f(x) = x^2$

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\,x\right) = \frac{4}{\pi^2 n^2}\,(-1)^n\,, \quad b_n = 0$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx)$$

Funkcija $f(x)$ je neprekidna, pa je

$$\tilde{f}(0) = f(0) = 0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Nadalje, koristeći Parsevalovu jednakost

$$\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

§ 5.12 Poissonova sumacijska formula

Ovdje koristimo oznaku za predfaktore Fourierovog integrala,

$$F(k) = \frac{1}{\varpi}\int \ldots \qquad f(x) = \frac{\varpi}{2\pi}\int \ldots$$

Tvrdimo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \varpi \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(2\pi k) \tag{5.30}$$

Uvedemo funkciju

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

koja je periodična s periodom 1. Tada je

$$\hat{g}(k) = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-i2k\pi x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{-i2k\pi x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y)e^{-i2k\pi y}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i2k\pi y}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}F(2\pi k)$$

Kompleksni Fourierov razvoj,

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k)e^{i2k\pi x}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo rezultat ... Konvergentnost (za $x \in [0,1]$),

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C}{(1+|x+n|)^2} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C}{|n|^2}$$

Specijalno, za $f(t) = e^{itx}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n)$$

Periodičnost u jednoj domeni povlači diskretizaciju u drugoj ...

Kratka kronologija analize konvergencije Fourierovog reda

1822. Fourier postavlja hipotezu da je “sve funkcije” moguće prikazati u obliku trigonometrijskog reda.

1829. Dirichlet daje prvi strogi dokaz za ?? funkcije.

1875. Weierstraß daje primjer neprekidne, ali nigdje derivabilne funkcije pomoću Fourierovog reda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

gdje je $0 < a < 1$, a b je neparan cijeli broj, takav da vrijedi $ab > 1 + (3\pi/2)$.

1876. Paul Du Bois-Reymond daje primjer neprekidne periodične funkcije (derivabilnost vjerojatno nije zadovoljena?) čiji Fourierov red divergira u jednoj točki.

1881. C. Jordan: konvergencija za funkcije ograničene varijacije u

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

1904. Fejér: usrednjene parcijalne sume teže u vrijednost funkcije …

1913. Lusin postavlja hipotezu …

1926. Kolmogorov je konstruirao (Lebesgue integrabilnu) funkciju čiji Fourierov red divergira gotovo svugdje.

1966. Kahane i Katznelson dokazuju da za svaki skup mjere nula $N \subsetneq [-\pi, \pi]$ postoji neprekidna funkcija čiji Fourierov red divergira u točkama skupa N.

1966. Lennart Carleson je dokazao da Fourierov red svake funkcije $f \in L^2$ gotovo svugdje konvergira (po točkama) u vrijednost funkcije f.

1968. Richard A. Hunt proširuje Carlesonov rezultat na funkcije $f \in L^p$ za $p > 1$.

6

Fourierov transformat

Neformalan uvod. Počinjemo s kompleksnim zapisom Fourierovog reda …

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{a_n}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) =$$

$$= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) e^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) e^{-inx}$$

$$A_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\,, \quad A_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}$$

Specijalno, kako je $b_0 = 0$ imamo (konzistentno) $A_0 = a_0/2$.

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{inx}$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(nx) - i\sin(nx)\big) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(nx) + i\sin(nx)\big) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Za Fourierov red na intervalu $[-L, L]$ imamo

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{in\pi x/L}\,, \quad A_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L}\,\mathrm{d}x$$

Sada nas zanima limes kada je domena cijeli $\mathbb{R}$, odnosno kada imamo funkciju koja nije nužno periodična. Uvrštavanjem koeficijenata A_n natrag u izraz za funkciju $\tilde{f}$ imamo

$$\tilde{f}(x) = \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(k)\, e^{-in\pi k/L}\,\mathrm{d}k\right) e^{in\pi x/L} =$$

$$= \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(k)\, e^{in\pi(x-k)/L}\,\mathrm{d}k$$

Sada uvodimo $\lambda_n = n\pi/L$, te $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \pi/L$,

$$\tilde{f}(x) = \lim_{L\to\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(k)\, e^{i\lambda_n(x-k)}\, \mathrm{d}k \right) \Delta\lambda$$

Neka je

$$F_L(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(k)\, e^{i\lambda(x-k)}\, \mathrm{d}k$$

Tada imamo

$$\tilde{f}(x) = \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\lambda_n)\, \Delta\lambda$$

U limesu $L \to \infty$ gornja suma prelazi u integral, $\Delta\lambda \to \mathrm{d}\lambda$, pa pišemo

$$F_L(\lambda) \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{i\lambda(x-k)}\, \mathrm{d}k$$

Dakle, "na prste" smo dobili …

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, f(k) e^{i\lambda(x-k)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-i\lambda k}\, \mathrm{d}k \right) e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)\, e^{-i\lambda k}\, \mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, \mathrm{d}x$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{ix\lambda}\, d\lambda$$

§ 6.1 Osnovna svojstva Fourierovog transformata

U poglavlju o Fourierovim transformatima promatrat ćemo kompleksne, apsolutno i kvadratno integrabilne, funkcije

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

za $p \geq 1$. Skalarni produkt na prostoru L^2 definiramo s

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^* g(x)\, \mathrm{d}x$$

Definicija 6.1. Fourierov transformat $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je definiran s

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \tag{6.1}$$

pri čemu je integral definiran kao limes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \equiv \lim_{L\to\infty} F_L(\omega)$$

Obično koristimo oznaku $\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega)$.

Napomena: Iako je odabir oznaka varijabli nebitan s matematičkog stanovišta, on može poslužiti kako bi se sugeriralo na fizikalnu interpretaciju varijabli. Tako, na primjer, pored para varijabli $\{t, \omega\}$ koji upućuje na fizikalni par {vrijeme, frekvencija}, susrećemo i par varijabli $\{x, k\}$ koji upućuje na fizikalni par {prostor, impuls}. Ponekad se koriste i fraze "direktni" i "impulsni" prostor.

Primjer: $f(t) = e^{-|t|}$. Lako se provjeri da je $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$F_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} e^{-|t|} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{0} e^{t} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{L} e^{-t} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\omega^2} - \frac{e^{-L}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\omega L}}{1 - i\omega} + \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega} \right)$$

$$F(\omega) = \lim_{L\to\infty} F_L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\omega^2}$$

Primjer: Neka je $f(t)$ funkcija nekog zaprimljenog signala (elongacije nekog mehaničkog oscilatora, izmjeničnog napona u strujnom krugu, zabilješka potresa na seizmografu ili inteziteta svjetlosti pulsara). Promotrimo koje je fizikalno značenje Fourierovog transformata $\mathcal{F}[f]$. Za primjer ćemo za početak uzeti jednostavnu funkciju: sinusni signal konačnog "trajanja",

$$f(t) = \sin(\omega_0 t)\, \chi_{[-T,T]}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \int_{-T}^{T} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \right) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega)} \bigg|_{-T}^{T} - \frac{e^{-i(\omega + \omega_0)t}}{-i(\omega + \omega_0)} \bigg|_{-T}^{T} \right) =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin((\omega - \omega_0)T)}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin((\omega + \omega_0)T)}{\omega + \omega_0} \right)$$

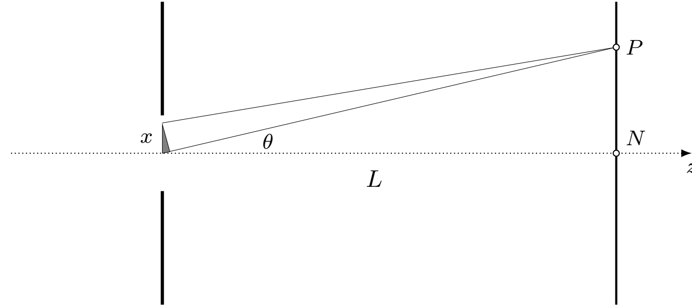
$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\sin((\omega - \omega_0)T)}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin((\omega + \omega_0)T)}{\omega + \omega_0} \right|$$

Dva dobivena šiljka u spektru odgovaraju frekvencijama funkcija $e^{\pm i\omega_0 t}$. Nadalje, kako je signal konačnog trajanja, uz dva glavna šiljka imamo "nabore". Šiljci će bit

čim bolje definirani, odnosno "nabori" manje izraženi, što je signal duljeg trajanja. S limesom signala beskonačnog trajanja ($T \to \infty$) ćemo se upoznati malo kasnije. Usput, pojava šiljaka "u paru" je tipična kod realnih funkcija jer

$$F(-\omega) = (F(\omega))^* \ , \quad |F(-\omega)| = |F(\omega)|$$

Primjer: Fraunhoferova difrakcija,



Elektromagnetski (ravni) val, frekvencije ω i valnog broja $k = \omega/c$, opisan električnim poljem

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \, e^{i(\omega t - kz)} \, \hat{\mathbf{x}}$$

nailazi na pukotinu širine $2a$. Razlika u putovima i u fazi dvije zrake koje dolaze u točku P na zastoru,

$$\Delta = x \sin\theta \ , \quad e^{-ik\Delta} = e^{-ikx\sin\theta} = e^{-ik_x x}$$

Intezitet svjetla $I(P)$ u nekoj točki zastora P (zadanoj fiksnim kutom θ) je proporcionalan kvadratu amplitude električnog polja u toj točki (preciznije, $I = \langle|\mathbf{S}|\rangle$, gdje je $\mathbf{S}$ Poyntingov vektor). Imamo stoga

$$\frac{I(P)}{I(N)} = \frac{|\mathbf{E}(P,t)|^2}{|\mathbf{E}(N,t)|^2} = \frac{\left|\int_{-a}^{a} e^{-ik_x x} \, \mathrm{d}x\right|^2}{\left|\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\right|^2} = \frac{2\pi|\mathcal{F}[f](k_x)|^2}{(2a)^2}$$

U brojniku nam se pojavio Fourierov transformat "funkcija pukotine" $f(x)$,

$$f(x) = \chi_{[-a,a]} = \begin{cases} 1 \ , & |x| \le a \\ 0 \ , & |x| > a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f(x)](k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik_x x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{e^{-ik_x x}}{-ik_x} \Big|_{-a}^{a} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{\sin(k_x a)}{k_x}$$

Uvrštavanjem u gornji izraz imamo

$$I(P) = \frac{\sin^2(k_x a)}{(k_x a)^2} \, I(N) \approx \left(\frac{\sin(ka\theta)}{ka\theta}\right)^2 I(N)$$

Teorem 6.2. *Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$ po dijelovima neprekidna funkcija. Tada njen Fourierov transformat $F(\omega)$ ima sljedeća svojstva:*

(a) $F(\omega)$ *je dobro definirana za sve* $\omega \in \mathbb{R}$,

(b) $F(\omega)$ *je neprekidna funkcija, te*

(c) $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0$

Dokaz :

(a) odmah slijedi iz nejednakosti

$$|F(\omega)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

(b) Promotrimo razliku

$$|F(\omega) - F(\omega_0)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1|\,\mathrm{d}t$$

$$\left|e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1\right|^2 = 2\big(1 - \cos((\omega-\omega_0)t)\big) = 4\sin^2 \frac{\omega-\omega_0}{2}\,t$$

$$|F(\omega) - F(\omega_0)| \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \left|\sin \frac{\omega-\omega_0}{2}\,t\right| \mathrm{d}t$$

Uvedimo pomoćnu oznaku

$$J(T) = \int_{-T}^{T} |f(t)|\,\mathrm{d}t > 0$$

Ovdje iz razmatranja izostavljamo trivijalan slučaj kada je $f \equiv 0$, pa $J(T) = 0$ za sve T. Kako je f apsolutno integrabilna funkcija, vrijedi

$$J \equiv \lim_{T\to\infty} J(T) < \infty\ ,$$

pa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $T > 0$, takav da je

$$\Big|J - J(T)\Big| < \epsilon/2\ ,$$

odnosno

$$\int_{|t|\ge T} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \epsilon/2\ .$$

Kako za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|\sin(x)| \le 1$, imamo nejednakost

$$\int_{|t|\ge T} |f(t)| \cdot \left|\sin \frac{\omega-\omega_0}{2}\,t\right| \mathrm{d}t \le \int_{|t|\ge T} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \epsilon/2$$

Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi i $|\sin(x)| \le |x|$, pa ako je $|t| \le T$, imamo

$$\left|\sin \frac{\omega-\omega_0}{2}\,t\right| \le \frac{|\omega-\omega_0|}{2}\,T$$

Za sve frekvencije ω, takve da vrijedi $|\omega - \omega_0| \le \epsilon/TJ(T)$, imamo

$$\int_{-T}^{T} |f(t)| \cdot \left|\sin \frac{\omega-\omega_0}{2}\,t\right| \mathrm{d}t \le \frac{\epsilon}{2J(T)} \int_{-T}^{T} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\epsilon}{2}$$

Sve skupa, to znači da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta = \epsilon/TJ(T) > 0$ (gdje je pomoćni parametar T zadan brojem ϵ), takav da $|\omega - \omega_0| < \delta$ povlači

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot \left|\sin \frac{\omega - \omega_0}{2}\, t\right| \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-T}^{T} |f(t)| \cdot \left|\sin \frac{\omega - \omega_0}{2}\, t\right| \mathrm{d}t + \int_{|t| \geq T} |f(t)| \cdot \left|\sin \frac{\omega - \omega_0}{2}\, t\right| \mathrm{d}t < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,$$

čime je dokazana tvrdnja.

(c) Slijedi iz Riemann-Lebesgueove leme. □

Primjer: $f(t) = e^{-at^2}$ uz $a > 0$. Koristimo trik pomoću deriviranja. Prvo valja provjeriti da je moguća zamjena derivacije i integrala: $F(\omega)$ je definirana za sve $\omega \in \mathbb{R}$, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(e^{-i\omega t} e^{-at^2}\right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)\, e^{-i\omega t} e^{-at^2}\, \mathrm{d}t$$

kovergira uniformno jer je podintegralna funkcija neprekidna. Nadalje, vrijedi

$$|(-it)\, e^{-i\omega t} e^{-at^2}| = |t| e^{-at^2}\,,$$

te

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| e^{-at^2}\, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\infty} t\, e^{-at^2}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{a}\, e^{-at^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

Stoga,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-it) e^{-i\omega t} e^{-at^2}\, \mathrm{d}t$$

$$u = e^{-i\omega t}\,, \quad du = -i\omega e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t\,, \quad -2ate^{-at^2}\, \mathrm{d}t = dv\,, \quad v = e^{-at^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{2a} \left(e^{-i\omega t} e^{-at^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} e^{-at^2}\, \mathrm{d}t \right) = -\frac{\omega}{2a} F(\omega)$$

$$\ln(F(\omega)) = -\frac{\omega^2}{4a} + C\,, \quad F(\omega) = A\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} = A$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Prema tome, uz izbor $2a = 1$ imamo

$$F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} = f(\omega)$$

Definicija 6.3. Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$ po dijelovima neprekidna funkcija, te $F = \mathcal{F}[f]$ njen Fourierov transformat. **Inverzan Fourierov transformat** funkcije F je definiran izrazom

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} F(\omega) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \tag{6.2}$$

Teorem 6.4. *Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$ po dijelovima neprekidna funkcija, a F njen Fourierov transformat. Tada za svaki $t \in \mathbb{R}$ u kojem postoje $f'(t \pm 0)$ vrijedi*

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} \tag{6.3}$$

Dokaz :

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-i\omega t'}\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\,\mathrm{d}t' \int_{-L}^{L} e^{i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\int_{-L}^{L} e^{i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega = \frac{e^{iL(t-t')} - e^{-iL(t-t')}}{i(t-t')} = \frac{2\sin(L(t-t'))}{t-t'}$$

Koristeći supstituciju $u = t' - t$ dobivamo

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+u)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\infty f(t+u)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^0 f(t+u)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u \right)$$

Za svaki $R > 0$ možemo napraviti rastav

$$\int_0^\infty \big(f(t+u) - f(t+0)\big)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^R \big(f(t+u)-f(t+0)\big)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_R^\infty f(t+u)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_R^\infty f(t+0)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Ovu jednakost možemo simbolički zapisati kao $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$, odakle preko nejednakosti trokuta na skupu $\mathbb{C}$ slijedi $|\mathcal{I}| \le |\mathcal{I}_1| + |\mathcal{I}_2| + |\mathcal{I}_3|$. Riemann-Lebeguesova lema nam govori da je za svaki $\epsilon > 0$ postoji $L > 0$, takav da je $|\mathcal{I}_1| \le \epsilon/3$ (pri tom koristimo pretpostavljena svojstva funkcije f, kao i kod dokaza konvergencije po točkama Fourierovog reda). Nadalje, vrijedi

$$|\mathcal{I}_2| \le \frac{1}{R} \int_R^\infty |f(t+u)|\,\mathrm{d}u\,, \quad |\mathcal{I}_3| \le |f(t+0)| \cdot \Big| \int_R^\infty \frac{\sin(Lu)}{u} \Big|\, du$$

Ovdje imamo dva konvergentna integrala (prvi po pretpostavci teorema, a kod drugog se u to možemo uvjeriti direktnim računom), pa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $R > 0$, takav da je $|\mathcal{I}_2| \le \epsilon/3$ i $|\mathcal{I}_3| \le \epsilon/3$. Sve skupa, imamo $|\mathcal{I}| \le \epsilon$, pa je

$$\lim_{L\to\infty} \int_0^\infty f(t+u)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u = f(t+0) \lim_{L\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\,f(t+0)$$

Analogno se pokaže

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-\infty}^0 f(t+u)\,\frac{\sin(Lu)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\,f(t-0)$$

odakle slijedi tražena tvrdnja. □

Teorem 6.5. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ po dijelovima neprekidne funkcije. Tada njihovi Fourierovi transformati zadovoljavaju naredna svojstva*

(a) linearnost: za sve $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}[\kappa f + \lambda g] = \kappa \mathcal{F}[f] + \lambda \mathcal{F}[g] \tag{6.4}$$

(b) množenje s potencijom varijable: ako je $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ za sve $k < n \in \mathbb{N}$ tada vrijedi

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\omega) = i^n \mathcal{F}^{(n)}[f](\omega) \tag{6.5}$$

(c) transformat derivacije: ako je $\lim_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ za sve $k < n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega) \tag{6.6}$$

DOKAZ : Prva tvrdnja trivijalno slijedi iz osnovnih svojstava integrala. Nadalje,

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, t^n f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{(-i)^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n} \mathcal{F}[f](\omega) = i^n \mathcal{F}^{(n)}[f](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, f^{(n)}(t) e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f^{(n-1)}(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, f^{(n-1)}(t) e^{-i\omega t} \right) =$$

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, f^{(n-1)}(t) e^{-i\omega t} = \cdots = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega)$$

□

Teorem 6.6. **(Plancherel)** *Neka su $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ po dijelovima neprekidne funkcije, te $F = \mathcal{F}[f]$ i $G = \mathcal{F}[g]$ njihovi Fourierovi transformati. Tada vrijedi*

$$\langle F, G \rangle = \langle f, g \rangle \tag{6.7}$$

Specijalno, za $f = g$ vrijedi

$$||F|| = ||f|| \tag{6.8}$$

DOKAZ :

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, F(\omega)^* G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, F(\omega)^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, g(t)\, e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, g(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, F(\omega)^*\, e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, g(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t} \right)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, f(t)^* g(t) = \langle f, g \rangle$$

□

Ovo je svojevrsan analogon Parsevalove jednakosti u slučaju Fourierovog transformata. Opet možemo reći kako je ukupna energija dobivena integracijom u “direktnom prostoru” jednaka energiji dobivenoj integracijom u “frekventnom prostoru”.

§ 6.2 Princip neodređenosti

Definicija 6.7. Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$, takva da je $||f|| \neq 0$. **Disperzija funkcije** f oko točke $a \in \mathbb{R}$ je definirana izrazom

$$\Delta_a f = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t} = \frac{||(t-a)f(t)||^2}{||f||^2} \tag{6.9}$$

Disperzija mjeri “raširenost” funkcije (poput varijance u statistici). Za primjer možemo uzeti funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiranu s

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + b^2} \,, \quad b > 0$$

Njenu disperziju možemo izračunati pomoću kompleksnog integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda t - a)^2}{(t^2 + b^2)^2} \,\mathrm{d}t \;\to\; \oint_{\mathcal{C}} \frac{(\lambda z - a)^2}{(z^2 + b^2)^2} \,\mathrm{d}z$$

gdje je $\mathcal{C}$ polukružna integracijska krivulja. Integral iz brojnika dobivamo za $\lambda = 1$, a integral iz nazivnika za $\lambda = 0$ i $a = 1$. Imamo polove 2. reda u $z = \pm ib$,

$$\mathrm{Res}(ib) = \lim_{z \to ib} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{(\lambda z - a)^2}{(z + ib)^2} = -\frac{i}{4b^3} \left(a^2 + (\lambda b)^2\right)$$

$$||(t-a)f(t)||^2 = \frac{\pi}{2b^3} \left(a^2 + b^2\right) , \quad ||f(t)||^2 = \frac{\pi}{2b^3}$$

Dakle, disperzija je dana izrazom

$$\Delta_a f = a^2 + b^2$$

Specijalno, za $a = 0$ imamo $\Delta_0 f = b^2$. Valja uočiti kako je ovo kvadrat polovice širine krivulje na polovici visine maksimuma krivulje (u $x_{\mathrm{max}} = 0$),

$$\frac{f(0)}{2} = \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{x_0^2 + b^2} \;\Rightarrow\; x_0 = b = \sqrt{\Delta_0 f}$$

Konačno izračunajmo Fourierov transformat ove funkcije,

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + b^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{b\sqrt{2\pi}}\, e^{-b|\omega|}$$

Disperzija Fourierovog transformata je

$$||(\omega - \alpha)F||^2 = \frac{\pi}{4b^5}\,(1 + 2\alpha^2 b^2)\ , \quad ||F||^2 = \frac{\pi}{2b^3}$$

$$\Delta_\alpha F = \frac{1}{2b^2}\,(1 + 2\alpha^2 b^2)\ , \quad \Delta_0 F = \frac{1}{2b^2}$$

Primjetimo, kada povećavamo parametar b, disperzija funkcije f se povećava, a disperzija transformata F smanjuje, i obratno, kada smanjujemo parametar b disperzija funkcije f se smanjuje, a disperzija transformata F povećava. Drugim riječima, kada se funkcija "širi" njen Fourierov transformat se "skuplja" i obratno. Sada ćemo pokazati da je ovo općenit fenomen.

Teorem 6.8. **(Princip neodređenosti)** *Neka je* $f \in L^2(\mathbb{R})$*, takva da je* $||f|| \neq 0$ *i*

$$\lim_{t \to \pm\infty} t|f(t)|^2 = 0\ .$$

Tada vrijedi

$$\Delta_a f \cdot \Delta_\alpha F \geq \frac{1}{4} \tag{6.10}$$

za sve $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

DOKAZ : Prvo ćemo dokazati da za tzv. *komutator*

$$[D, (t-a)]f(t) \equiv D\big((t-a)f(t)\big) - (t-a)Df(t)\ , \quad D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - i\alpha$$

vrijedi identitet

$$[D, (t-a)]f(t) = f(t)$$

Imamo odmah

$$D\big((t-a)f(t)\big) = f(t) + (t-a)f'(t) - i\alpha(t-a)f(t)$$

pa je

$$D\big((t-a)f(t)\big) - (t-a)Df(t) = f(t) + (t-a)f'(t) - i\alpha(t-a)f(t) -$$

$$-(t-a)f'(t) + i\alpha(t-a)f(t) = f(t)$$

Pomnožimo sada obje strane dobivenog identiteta skalarno s funkcijom f,

$$\big\langle D\big((t-a)f(t)\big), f(t)\big\rangle - \langle (t-a)Df(t), f(t)\rangle = ||f||^2$$

Valja primjetiti da je

$$\langle -i\alpha(t-a)f(t), f(t)\rangle = \langle (t-a)f(t), i\alpha f(t)\rangle\ ,$$

$$\langle (t-a)Df(t), f(t)\rangle = \langle Df(t), (t-a)f(t)\rangle\ ,$$

te da primjenom parcijalne integracije i pretpostavke u teoremu imamo

$$\big\langle ((t-a)f(t))', f(t)\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}((t-a)f^*(t))' f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left((t-a)|f(t)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}(t-a)f^*(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \big\langle (t-a)f(t), -f'(t)\big\rangle$$

To znači da gornju jednakost možemo pisati u obliku

$$\langle (t-a)f(t), -Df(t)\rangle - \langle Df(t), (t-a)f(t)\rangle = ||f||^2$$

Primjenom nejednakosti trokuta

$$\big|\,\langle (t-a)f(t), -Df(t)\rangle\,\big| + \big|\,\langle Df(t), (t-a)f(t)\rangle\,\big| \geq ||f||^2$$

a zatim SCB nejednakosti

$$2\big|\big|Df(t)\big|\big|\cdot\big|\big|(t-a)f(t)\big|\big| \geq ||f||^2$$

Primjenom Plancherelovog teorema i svojstava Fourierovog transformata imamo jednakost

$$\big|\big|Df(t)\big|\big| = \big|\big|\mathcal{F}[Df(t)]\big|\big| = \big|\big|(i\omega - i\alpha)F(\omega)\big|\big| = \big|\big|(\omega-\alpha)F(\omega)\big|\big|$$

Dakle,

$$2\big|\big|(\omega-\alpha)F(\omega)\big|\big|\cdot\big|\big|(t-a)f(t)\big|\big| \geq ||f||^2$$

Ako sada ovu nejednakost kvadriramo (to možemo napraviti jer su obje strane pozitivne),

$$4\big|\big|(\omega-\alpha)F(\omega)\big|\big|^2\cdot\big|\big|(t-a)f(t)\big|\big|^2 \geq ||f||^4\ ,$$

pa uvrstimo definicije disperzije funkcije f i njenog transformata F,

$$\big|\big|(\omega-\alpha)F(\omega)\big|\big|^2 = ||F||^2\Delta_\alpha F\ , \quad \big|\big|(t-a)f(t)\big|\big|^2 = ||f||^2\Delta_a f\ ,$$

korištenjem jednakosti $||F|| = ||f||$, dobivamo nejednakost

$$\Delta_\alpha F(\omega)\cdot\Delta_a f(t) \geq \frac{1}{4}$$

□

Za koje sve funkcije vrijedi gornja *jednakost*?

Primjer: Heisenbergova relacija neodređenosti u kvantnoj mehanici. Koordinata x i impuls p u kvantnoj fizici su opisani operatorima $\hat{x}$ i $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$, te pri tom zadovoljavaju komutacijsku relaciju

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Srednja očekivana vrijednost operatora $\hat{O}$ dana je izrazima

$$\big\langle\hat{O}\big\rangle = \big\langle\psi|\hat{O}|\psi\big\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\hat{O}\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(p)\hat{O}\psi(p)\,dp$$

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-ipx/\hbar}\,\mathrm{d}x$$

Neodređenost u koordinati i impulsu: neka je $\langle\hat{x}\rangle = x_0$ i $\langle\hat{p}\rangle = p_0$

$$(\Delta x)^2 = \big\langle(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2\big\rangle = \Delta_{x_0}\psi(x)$$

$$(\Delta p)^2 = \left\langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \right\rangle = \Delta_{p_0}\psi(p)$$

Uzimajući u obzir prisutnost dimenzionalnog faktora $\hbar$, princip neodređenosti povlači

$$\big(\Delta_{x_0}\psi(x)\big) \cdot \big(\Delta_{p_0}\psi(p)\big) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

odnosno

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

FT u D dimenzija. Kada imamo funkciju $f : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$, tada ...

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{r})](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \, \mathrm{d}^D r$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\mathbf{k})](\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \, \mathrm{d}^D k$$

§ 6.3 Konvolucija

Definicija 6.9. **Konvolucija** dvije funkcije f i g je definirana izrazom

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x-u) \, \mathrm{d}u \tag{6.11}$$

Napomena: ovdje koristimo odabir normalizacije koji smanjuje količinu dodatnih predfaktora u izrazima koji slijede (dio literature u definiciji konvolucije izostavlja faktor $1/\sqrt{2\pi}$).

Teorem 6.10. *Svojstva konvolucije*

(a) *komutiranje*

$$f * g = g * f$$

(b) *asocijativnost*

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

(c) *distributivnost*

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

(d) *veza s Fourierovim transformatom*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

Dokaz :

(a)

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u = \{v = x-u\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-v)g(v)\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)f(x-v)\,dv = (g*f)(x)$$

(b)

$$(f*(g*h))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,(g*h)(x-u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(v)h(x-u-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Upotrebom supstitucije $r = u$, $s = u + v$ (s Jacobijanom $|J| = 1$) imamo

$$(f*(g*h))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)g(s-r)h(x-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(s)\,h(x-s)\,\mathrm{d}s = ((f*g)*h)(x)$$

(c) Slijedi iz linearnosti integrala.

(d) Imamo

$$\mathcal{F}[f*g](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

Upotrebom supstitucije $s = u$, $r = t - u$ (s Jacobijanom $|J| = 1$) imamo

$$\mathcal{F}[f*g](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(r)e^{-i\omega(s+r)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r = \mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)$$

□

Frekvencijski filter. Pretpostavimo da zadanom signalu $s(t)$ želimo izdvojiti ("profiltrirati") neke frekvencije prema željenom "profilu" $\Phi(\omega)$. Označimo s $f(t)$ tako dobiven filtrirani signal. Označimo li s $\varphi(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi](t)$, tada je

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi\cdot\mathcal{F}[s]](t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]\cdot\mathcal{F}[s]](t) = (\varphi * s)(t)$$

Prednost ovakvog zapisa je taj što za dani profil Φ, jednom izračunata funkcija φ konvolucijom daje profiltrirani signal (čime izbjegavamo opetovano računanje Fourierovog transfromata signala s). Uzmimo na primjer filter Φ koji propušta samo frekvencije u pojasu $[\omega_1, \omega_2]$, gdje su $0 < \omega_1 < \omega_2$ neke realne konstantne frekvencije,

$$\Phi(\omega) = \chi_{[\omega_1,\omega_2]}(\omega)$$

Tada je

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[\omega_1,\omega_2]}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega_2 t} - e^{i\omega_1 t}}{it}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_2 u} - e^{i\omega_1 u}}{u}\, s(t-u)\,\mathrm{d}u$$

Uzmemo li na primjer $s(t) = \exp(i\omega_0 t)$, gdje je $\omega_0 > 0$ neka realna frekvencija, koristeći

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x}\,\mathrm{d}x = \pi i \,\mathrm{sgn}\,(a)$$

dobivamo

$$f(t) = \frac{\mathrm{sgn}\,(\omega_2 - \omega_0) - \mathrm{sgn}\,(\omega_1 - \omega_0)}{2}\, e^{i\omega_0 t} \ .$$

Primjetimo, brojnik u posljednjem izrazu ne iščezava samo kada je $\omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$ i u kom slučaju iznosi 2. Prema tome, možemo pisati

$$f(t) = \chi_{[\omega_1,\omega_2]}(\omega_0) e^{i\omega_0 t}$$

Napomena: kada koristimo realno zapisan signal, npr.

$$s(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

tada za izdvajanje frekventnog pojasa $[\omega_1, \omega_2]$ valja koristiti simetrično zapisan profil,

$$\Phi(\omega) = \chi_{[\omega_1,\omega_2]}(\omega) + \chi_{[-\omega_2,-\omega_1]}(\omega)$$

Kinematički primjer: odredite brzinu $v(t)$ točkaste čestice mase m na koju djeluje sila $F(t)$ (u 1D),

$$\dot{v}(t) = \frac{F(t)}{m} \equiv f(t)$$

Uvodimo Fourierove transformate

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \ , \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega\tilde{v}(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Jedan konzistentan (ali ne i jedinstven!) odabir je

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega}$$

Time dobivamo

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\, \tilde{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\, f(t') \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega}$$

Uvedemo li pokratu

$$g(\tau) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega}$$

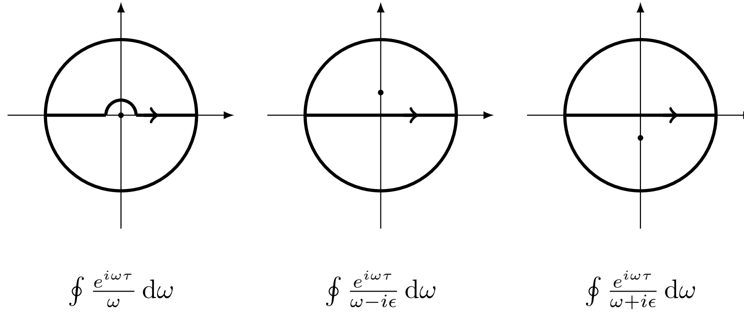
Tada je

$$v(t) = (f * g)(t)$$

Primjetimo, u slučaju kada je $f(t) = 0$, odavde dobivamo $v(t) = 0$. Međutim, mi znamo kako je općenito rješenje u takvom slučaju konstantna brzina, $v(t) = v_0$. Drugim riječima, ovaj postupak nam je dao samo jedno *partikularno* rješenje promatrane diferencijalne jednadžbe. Općenito stoga imamo

$$v(t) = v_h(t) + (f * g)(t) = v_0 + (f * g)(t)$$

No, što je uopće ona funkcija g? Promatramo kompleksne integrale



$\oint \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega$ $\oint \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega - i\epsilon}\,\mathrm{d}\omega$ $\oint \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega + i\epsilon}\,\mathrm{d}\omega$

U prvom slučaju promatramo Cauchyjevu glavnu vrijednost integrala, a u preostala dva pomičemo pol iz ishodišta duž imaginarne osi za neku malu vrijednost $\epsilon > 0$, koju ćemo na kraju pustiti u limes $\epsilon \to 0$. Rezultati su (za $\tau \neq 0$)

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \pi i \,\mathrm{sgn}\,(\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega \pm i\epsilon}\,\mathrm{d}\omega = \mp 2\pi i\, e^{\pm\tau\epsilon}\,\theta(\mp\tau)$$

Strogo govoreći, ovi integrali nisu definirani u $\tau = 0$, ali vrijednost funkcije g u jednoj točki ne utječe na konačnu vrijednost funkcije v, pa nam to ovdje nije toliko važno. Pripadna rješenja glase

$$v_1(t) = v_0 + \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{t} f(t')\,\mathrm{d}t' - \int_{t}^{\infty} f(t')\,\mathrm{d}t'\right)$$

$$v_2(t) = v_0 + \int_{-\infty}^{t} f(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$v_3(t) = v_0 - \int_{t}^{\infty} f(t')\,\mathrm{d}t'$$

Očigledno, samo drugo rješenje poštuje *kauzalnost* (na vrijednost funkcije v u trenutku t mogu utjecati samo vrijednosti funkcije f *prije* tog trenutka) i stoga njega biramo kao ono fizikalno!

Elektromagnetski primjer: veza između polja električnog pomaka i električnog polja u linearnom dielektričnom mediju. Općenito neće vrijediti veza

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon\, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\ ,$$

već ona zapisana u frekventnom prostoru,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \ .$$

Ona nam govori kako linearan medij “odgovara” pobudom jednake frekvencije kao i vanjsko električno polje. Uvedimo električnu susceptibilnost $\chi_e(\omega)$ i njen inverzni Fourierov transformat $G(t)$,

$$\chi_e(\omega) = \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1 \ , \quad G(t) = \mathcal{F}^{-1}[\chi_e(\omega)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_e(\omega)\, e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega \ .$$

Koristeći svojstva Fourierovog transformata i konvolucije imamo

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\epsilon_0(\chi_e(\omega)+1)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)] =$$

$$= \epsilon_0\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)] + \epsilon_0\mathcal{F}^{-1}[\chi_e(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)] = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \epsilon_0(G*\mathbf{E})(\mathbf{r},t)$$

Prema tome, vektor polarizacije $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t-t') \, \mathrm{d}t' = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t') \, \mathrm{d}t'$$

§ 6.4 Delta funkcija i distribucije

Što je Fourierov transformat konstantne funkcije, $f(t) = 1$?

$$\mathcal{F}[1](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\bigg|_{-T}^{T} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

Pogledajmo pobliže dobiveni limes. U ishodištu, $\omega = 0$, vrijedi

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{\sin(\omega T)}{\omega} = T$$

pa gornji limes $T \to \infty$ divergira. Za sve $\omega \neq 0$ limes $T \to \infty$ uopće ne postoji! Nadalje, promotrimo inverzni Fourierov transformat neke proizvoljne glatke funkcije f. Koristeći teorem o inverzu Fourierovog transformata imamo

$$f(0) = \mathcal{F}^{-1}[F](0) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} e^0 F(\omega) \, \mathrm{d}\omega =$$

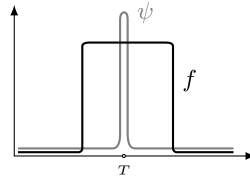
$$= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\, f(u) e^{-i\omega u} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\, f(u) \int_{-L}^{L} \mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega u} =$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \, \frac{2i\sin(Lu)}{iu} \, \mathrm{d}u = \lim_{L\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(Lu)}{\pi u} \, f(u) \, \mathrm{d}u$$

Ovaj rezultat možemo interpretirati na način da niz funkcija $(\sin(nx)/\pi x)_{n\in\mathbb{N}}$ integriranjem “vadi” vrijednost “probne” funkcije f u jednoj točki (u ovom slučaju, u 0),

pa njihov limes formalno ima smisla *pod integralom*, iako van integrala nije dobro definiran.

Heuristička motivacija. Valja uočiti kako se s ovim poopćenim pojmom funkcije susrećemo posvuda u fizici. Obično neku fizikalnu opservablu idealizirano predstavljamo funkcijom $\psi(\mathbf{r}, t)$ koja u svakoj točki prostora i u svakom trenutku pridjeljuje neku vrijednost. U idealnom svijetu bismo savršeno preciznim uređajem uistinu mogli savršeno precizno izmjerili vrijednost funkcije $\psi(\mathbf{r}, t)$ u svim točkama gdje je ona definirana. Međutim, u stvarnom svijetu proces mjerenja izgleda sasvim drugačije. Mjerni uređaji imaju konačnu razlučivost, pa ono što uistinu vidimo jest vrijednost funkcije $\psi(\mathbf{r}, t)$ uprosječenu (prointegriranu) po nekom malom, ali konačno velikom volumenu ΔV i vremenu ΔT. Nadalje, mjerni uređaj ima nehomogenu osjetljivost (različito precizno mjeri u različitim točkama), primjerice definiranu nekom glatkom "test" funkcijom $f(\mathbf{r}, t)$.



U konačnici, rezultat našeg mjerenja jest integral oblika,

$$\frac{1}{\Delta V}\,\frac{1}{\Delta T}\int \psi(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$

Vidimo da "matematički objekt" ψ ne mora nužno biti uobičajena funkcija, definirana u svim točkama neke domene — dovoljno je da prointegrirana s nekom težinskom test funkcijom f daje suvisao rezultat. Takve primjere ćemo susresti kada, primjerice, želimo opisati gustoću mase ili naboja točkastih čestica, sile koja djeluje "u jednoj točki", "trenutnu" izmjenu impulsa prilikom elastičnog sudara, itd.

Definicija 6.11. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Neka je $K \subseteq S$ skup točka točaka domene na kojima funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ poprima vrijednost različitu od nula,

$$K = f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$$

Nosač funkcije f je zatvarač skupa K,

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{K}$$

Test funkcije na skupu $\mathbb{R}$ su $C^\infty(\mathbb{R})$ funkcije, čiji je nosač kompaktan (zatvoren i omeđen) skup.

Na primjer, uočimo da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\,, & x > 0 \\ 0\,, & x \leq 0 \end{cases}$$

glatka na cijelom $\mathbb{R}$ (uključujući i točku $x = 0$, gdje sve lijeve i desne derivacije iščezavaju). Stoga je i funkcija $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = g(-(x-a))g(x+a) = \chi_{[-a,a]} \exp\left(-\frac{2a}{a^2 - x^2}\right)$$

svugdje glatka, te ima kompaktan nosač $\operatorname{supp}(\phi) = [-a, a]$. Zaključujemo da je ϕ jedan primjer test funkcije.

Ovakav izbor test funkcija je svakako praktičan, no je li i prerestriktivan? Ipak, mnoge funkcije je moguće prikazati kao zbroj test funkcija …

Definicija 6.12. Distribucija ψ je neprekidan linearan funkcional na skupu test funkcija. Neprekidnost u ovom kontekstu znači da za svaki niz test funkcija $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takvih da im je presjek nosača neprazan kompaktan skup, te da za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ niz $(\phi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno k test funkciji, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \psi[\phi_n] = \psi\big[\lim_{n\to\infty} \phi_n\big]$$

Linearnost, kao i inače, znači da za svake dvije test funkcije ϕ i χ, te realne brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\psi[a\phi + b\chi] = a\psi[\phi] + b\psi[\chi]$$

Na primjer, za svaku po dijelovima neprekidnu funkciju $f \in L^1(\mathbb{R})$ možemo definirati distribuciju ψ, na način da je za svaku test funkciju ϕ

$$\psi[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

Ovo je primjer tzv. **regularne distribucije**. Postoje, međutim, i **singularne distribucije** koje nisu povezane s nekom funkcijom …

Definicija 6.13. Delta funkcija δ (ovdje riječ “funkcija” treba shvatiti uvjetno) je distribucija sa svojstvom

$$\delta[\phi] = \phi(0) \tag{6.12}$$

za svaku test funkciju ϕ. U literaturi se delta funkcija ponekad naziva *Diracova delta funkcija.* Nadalje, za svaki $a \in \mathbb{R}$ uvodimo srodnu distribuciju $\delta(x-a)$, takvu da je

$$\delta(x-a)[\phi] = \phi(a)\ . \tag{6.13}$$

Tradicinalni način zapisivanja definicije delta funkcije je pomoću integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(a) \tag{6.14}$$

Međutim, ovdje valja imati na umu kako "$\delta(x)$" ne predstavlja nikakvu funkciju $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$! S obzirom na konvoluciju, delta funkcija se ponaša poput "neutralnog elementa",

$$(\delta * f)(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}$$

Komentar 6.14. Postoji li neprekidna funkcija $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0)$$

za svaku test funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Pretpostavimo da je odgovor na ovo pitanje afirmativan i promotrimo test funkcije s nosačem sadržanim unutar segmenta $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, takvim da je $0 \notin [a, b]$. Tada je, po pretpostavci,

$$\int_a^b \delta(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0) = 0$$

Nadalje, promotrimo proizvoljnu točku $x_0 \in [a, b]$. Pretpostavimo da je $\delta(x_0) > 0$ (analogan postupak bi proveli u slučaju kada je $\delta(x_0) < 0$). Kako je po pretpostavci δ neprekidna funkcija, to znači da postoje realni brojevi $\epsilon > 0$ i $c > 0$, takvi da je $\delta(x) > c$ za sve $x \in S \equiv [a, b] \cap \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\rangle$. Odaberimo sada nenegativnu test funkciju ϕ s nosačem $[p, q] \subseteq S$, npr.

$$\phi(x) = \chi_{[p,q]} \exp\left(\frac{q - p}{(x - p)(x - q)}\right) .$$

Tada je

$$\int_a^b \delta(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x > c \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

što je u kontradikciji s gornjim zahtjevom iščezavanja promatranog integrala, odakle slijedi kako je $\delta(x_0) = 0$. S obzirom da su interval $[a, b]$ i točka $x_0 \in [a, b]$ bili proizvoljni, zaključujemo da je $\delta(x) = 0$ za sve $x \neq 0$. Konačno, kako je δ po pretpostavci neprekidna funkcija , slijedi i da je $\delta(0) = 0$, odnosno $\delta(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, a ovakva trivijalna funkcija sigurno ne zadovoljava svojstva delta funkcije! //

Komentar 6.15. U literaturi se često navodi "normalizacija" delta funkcije u obliku

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 .$$

Čak i kada je formalno zapisana, $\delta[1] = 1$, strogo govoreći nema smisla jer konstantna funkcija $\phi(x) = 1$ *nije* test funkcija (nema kompaktan nosač). Međutim, ovakav zapis ipak možemo formalno interpretirati kao tvrdnju da je $\delta[\phi] = 1$ *za svaku* test funkciju ϕ za koju postoji segment $[a, b] \subseteq \mathrm{supp}(\phi)$, takav da je $0 \in [a, b]$ i $\phi(x) = 1$ za sve $x \in [a, b]$. //

Reprezentacije delta funkcije. Želimo pronaći niz funkcija $\delta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje "teže" k delta "funkciji",

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$$

gdje limes valja promatrati u smislu

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x = f(0)$$

Postoji mnoštvo primjera,

$$\delta_n(x) = \frac{n}{2}\, \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\,, \quad \delta_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}\,, \quad \delta_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\pi x^2}\,,$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\,\frac{1}{1+n^2x^2}\,, \quad \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp(-n^2x^2)\,, \quad \delta_n(x) = \frac{1}{\pi}\,D_n(x)$$

S drugim primjerom u nizu smo se već ranije sreli, promotrimo sad prvi, još jednostavniji primjer: neka je f neka test funkcija, a F njena primitivna funkcija,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{nf(x)}{2}\, \mathrm{d}x = \{u = 1/n\} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \int_{-u}^{u} \frac{f(x)}{2u}\, \mathrm{d}x = \lim_{u\to 0} \frac{F(u)-F(-u)}{2u} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{F(u)-F(0)+F(0)-F(-u)}{2u} = F'(0) = f(0)$$

Komentar 6.16. Neka je $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $\delta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takvih da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0 \quad \forall\, x \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\, \mathrm{d}x = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Slijedi li odavde nužno

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \delta(x)\ ?$$

Odgovor je negativan jer možemo uzeti na primjer niz $\delta_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$ koji zadovoljava gore navedena svojstva, ali $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) \neq \delta(x)$. Poanta je da funkcije $\delta_n(x)$ moraju biti nekako "koncentrirane" oko $x = 0$. //

Teorem 6.17. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (integrabilna) funkcija koja je*

(a) pozitivno semidefinitna, $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$,

(b) normalizirana,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,, \quad \textit{te}$$

(c) lokalizirana u smislu da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $A > 0$ takav da je

$$\int_{|x|>A} f(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon$$

Tada niz funkcija $\delta_n(x) = nf(nx)$ ima svojstvo da je

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \delta(x)$$

Dokaz : Mi želimo dokazati kako za svaku test funkciju ϕ i niz

$$\Delta_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x - \phi(0)$$

vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$$

Iz pretpostavke (b) slijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} nf(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

pa možmo pisati

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\big(\phi(x) - \phi(0)\big)\,\mathrm{d}x$$

Nadalje, za bilo koju konstantu $A > 0$ možemo napraviti rastav integrala na dijelove $|x| < A$ i $|x| > A$, odakle pomoću nejednakosti trokuta slijedi

$$|\Delta_n| \leq \left| \int_{|x|<A} \delta_n(x)\big(\phi(x) - \phi(0)\big)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{|x|>A} \delta_n(x)\big(\phi(x) - \phi(0)\big)\,\mathrm{d}x \right|$$

Test funkcija ϕ je omeđena, odakle slijedi da je i razlika $|\phi(x) - \phi(0)|$ omeđena, npr. realnim brojem $M \geq 0$, a možemo uvesti i

$$m(A) \equiv \sup_{|x|<A} |\phi(x) - \phi(0)|$$

Iz svojstva $a)$ slijedi $\delta_n(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa je

$$\int_{|x|<A} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Odavde slijedi

$$|\Delta_n| \leq m(A) + M \int_{|x|>A} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Kako je test funkcija ϕ neprekidna, znamo da je $\lim_{A\to 0} m(A) = 0$, odnosno da za svaki $\epsilon > 0$ postoji (dovoljno mali) $A > 0$, takav da je $m(A) < \epsilon/2$. Konačno, iz pretpostavke $c)$ slijedi kako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $B > 0$, takav da je

$$\frac{\epsilon}{2M} > \int_{|y|>B} f(y)\,\mathrm{d}y = \{y = nx\} = \int_{|x|>\frac{B}{n}} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Odaberemo li dovoljno velik $N \in \mathbb{N}$, takav da je $NA > B$, tada zbog $\delta_n(x) \geq 0$ za sve $n \geq N$ vrijedi

$$\int_{|x|>\frac{B}{n}} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{|x|>A} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Sve skupa, znamo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji dovoljno velik $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$ vrijedi

$$|\Delta_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + M\,\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$$

čime je dokazana tvrdnja. □

Na primjer,

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\chi_{[-1,1]}(x)\;, \quad \delta_n(x) = \frac{n}{2}\,\chi_{[-1,1]}(nx) = \frac{n}{2}\,\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$$

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\pi x^2}\;, \quad \delta_n(x) = n\,\frac{\sin^2(nx)}{\pi (nx)^2} = \frac{\sin^2(nx)}{n\pi x^2}$$

Teorem 6.18. *Formalna veza s θ-funkcijom*

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{\mathrm{d}x}\;, \tag{6.15}$$

gdje jednakost treba shvatiti u smislu da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x}\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0)$$

za svaku test funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dokaz :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \phi(x)\theta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)\theta(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^{\infty} \phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\phi(x)\Big|_0^{\infty} = \phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Komentar 6.19.

$$\int_{-\infty}^{b} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\chi_{\langle-\infty,b]}(x)\,\mathrm{d}x = \chi_{\langle-\infty,b]}(a) = \theta(b-a)$$

//

Komentar 6.20. Valja uočiti vezu s Dirichletovom jezgrom,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\,D_N(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(D_N*f)(a)$$

//

Integralna reprezentacija delta funkcije,

$$\mathcal{F}[\delta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\delta(t)=\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big](t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\big|\omega'=-\omega\big|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega' t}\,\mathrm{d}\omega'=\delta(t)$$

$$\delta(t-a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(t-a)}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega(t-a)}\,\mathrm{d}\omega \tag{6.16}$$

Sada možemo izračunati

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)](\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2i}\left(e^{it(\omega_0-\omega)}-e^{-it(\omega_0+\omega)}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\big(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\big)$$

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)](\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(e^{it(\omega_0-\omega)}+e^{-it(\omega_0+\omega)}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\big(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\big)$$

Napomena oko delta funkcija u spektru: kod konačnog signala gledamo (relativne) visine šiljaka, a kod neograničenog signala koeficijente uz svaku od delta funkcija.

Svojstva delta funkcije. Obično se u literaturi uvodi niz distribucija srodnih delta funkciji, čija su definirajuća svojstva motivirana svojstvima koja bi imala delta "funkcija" kada bi se ponašala poput "prave funkcije". Ovdje navodimo najvažnije među spomenutim distribucijama:

(a) Za svaki $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\,\delta(x) \tag{6.17}$$

Odmah slijedi da je $\delta(-x)=\delta(x)$.

(b) Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilna funkcija koja ima samo jednostruke nul-točke $\{x_i\}$, točke u kojima vrijedi $f(x_i)=0$ i $f'(x_i)\neq 0$. Tada je

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \tag{6.18}$$

(c) "Derivacija delta funkcije",

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x = -\phi'(a) \tag{6.19}$$

i općenito, za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\delta^{(n)}(x-a)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\phi^{(n)}(a) \tag{6.20}$$

Motivacije za gornje definicije.

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\delta(ax)\,\mathrm{d}x = \{t = ax\} = \int_{-\infty\cdot a}^{\infty\cdot a} \phi(t/a)\delta(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{a} =$$

$$= \frac{\mathrm{sgn}(a)}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t/a)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\frac{1}{|a|}\,\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Ako je f monotona rastuća funkcija, koristeći supstituciju $u = f(x)$ (tako da je $x = f^{-1}(u)$, te $\mathrm{d}x = du/f'(f^{-1}(u))$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)\phi(f^{-1}(u))\,\frac{du}{f'(f^{-1}(u))} =$$

$$= \frac{\phi(x_0)}{f'(x_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x-x_0)}{f'(x_0)}\,\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

gdje je $x_0 = f^{-1}(0)$. Ako je f monotono padajuća funkcija, tada u gornjem izrazu imamo dodatni minus zbog promjene granica integracije. Stoga, za monotone funkcije vrijedi

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$$

Nadalje, valja uočiti da je za $\epsilon > 0$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(x-a)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\chi_{[a-\epsilon,a+\epsilon]}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(a)$$

Stoga, kada imamo općenitu (ne nužno monotonu) funkciju f s jednostavnim nul-točkama $\{x_i\}$, tada prvo integral rastavimo na intervale oko nul-točaka, na kojima je funkcija f monotona (izostavljeni dijelovi početnog integrala ne doprinose, jer je na tim intervalima funkcija f različita od nule),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_i \int_{x_i-\epsilon_i}^{x_i+\epsilon_i} \delta(f(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

odakle primjenom specijalnog rezultata za monotone funkcije slijedi tražena formula.

(c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x = \phi(x)\delta(x-a)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = -\phi'(a)$$

gdje su u posljednjem koraku iskoristili to da je $\phi(x)$ test funkcija, pa ima kompaktan nosač i stoga iščezava kada $x \to \pm\infty$. Tvrdnja se lako poopći na slučaj n-te derivacije.

Primjer za (b): za $a \neq b$

$$\delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|a-b|}\left(\delta(x-a) + \delta(x-b)\right)$$

ili

$$\delta(\sin x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - m\pi)}{|\cos(m\pi)|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\pi)$$

Teorem 6.21. (**Sokhotski-Plemelj**) *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i $a < 0 < b$. Tada je*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}\,\mathrm{d}x = \mp i\pi f(0) + \mathcal{P}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{6.21}$$

gdje $\mathcal{P}$ označava Cauchyjevu glavnu vrijednost. Ova relacija je u literaturi često simbolički zapisan u obliku

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\,\frac{1}{x} \tag{6.22}$$

Dokaz : (Skica)

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x \mp i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \mp i\pi \int_a^b \frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)}\,f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^b \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2}\,\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Za $x \neq 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2} = 1$$

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_a^{-\epsilon} + \int_\epsilon^b\right) \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

□

Delta funkcija u više dimenzija,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0)$$

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}\tau = f(\mathbf{r}_0)$$

Ponekad se posebno napomene broj dimenzija, $\delta^{(d)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$. Primjerice, gustoću mase $\rho(\mathbf{r})$ točkaste čestice mase m, smještene u točki s radijus-vektorom $\mathbf{r}_0$ možemo zapisati pomoću delta funkcije

$$\rho(\mathbf{r}) = m\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

Delta funkcija u različitim koordinatnim sustavima. Uzmimo prijelaz iz Kartezijevog $\{x, y, z\}$ u neki općeniti $\{u, v, w\}$,

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}\tau = \iiint f(\mathbf{r})\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = f(\mathbf{r}_0)$$

$$= \iiint f(\mathbf{r})N(u,v,w)\delta(u-u_0)\delta(v-v_0)\delta(w-w_0)|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix}$$

Ovdje moramo odabrati funkciju $N(u, v, w)$, takvu da je konačan rezultat konzistentan s onim dobivenim u bilo kojem drugom koordinatnom sustavu. To postižemo s $N = 1/J$, odnosno

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \frac{1}{|J(u,v,w)|}\,\delta(u-u_0)\delta(v-v_0)\delta(w-w_0) \tag{6.23}$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \frac{1}{s}\,\delta(s-s_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0) =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(\theta-\theta_0)$$

Integralna reprezentacija

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\mathrm{d}^d k \tag{6.24}$$

§ 6.5 Ostale integralne transformacije

Općenito možemo definirati integralnu transformaciju oblika,

$$F(s) = \int_a^b K(x,s)f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.25}$$

gdje je K tzv. **jezgra transformata**. Na primjer, **Laplaceov transformat**,

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.26}$$

i njegov inverz

$$\mathcal{L}^{-1}[f](s) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\,F(s)\,\mathrm{d}s \tag{6.27}$$

7

Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Parcijalna diferencijalna jednadžba, ili skraćeno PDJ, definira ponašanje funkcije u koja ovisi o dvije ili više nezavisnih varijabli, pomoću parcijalnih derivacija funkcije u, ponekad same funkcije u, i funkcija nezavisnih varijabli u problemu. Općenito je nepoznata funkcija preslikavanje $u : D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ domena, a $n \geq 2$ predstavlja broj nezavisnih varijabli o kojima ona ovisi. **Red** PDJ je red najviše derivacije u jednadžbi. Na primjer, općenita PDJ prvog reda za $n = 2$ ima oblik

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \ , \tag{7.1}$$

a općenita PDJ drugog reda za $n = 2$ oblik

$$G(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \ , \tag{7.2}$$

gdje su F i G neke funkcije neprekidne u svim svojim argumentima.

§ 7.1 Fizikalna pozadina osnovnih PDJ

Jednadžba prometne gužve primjer je $(1 + 1)$–dimenzionalne jednadžbe kontinuiteta,

$$\rho_t(t, x) + \phi_x(t, x) = 0 \tag{7.3}$$

gdje je $\rho(t, x)$ linearna gustoća vozila na prometnici (dimenzije L^{-1}), a $\phi(t, x)$ njihov tok (dimenzije T^{-1}). U najjednostavnijoj aproksimaciji tok raste linearno s gustoćom, $\phi = v\rho$, gdje je v (konstantna) brzina vozila,

$$\rho_t(t, x) + v\rho_x(t, x) = 0 \tag{7.4}$$

Nizozemski matematičar Jan M. Burgers je 1948. godine promatrao nešto realističniji model prometa, uključivanjem nekoliko dodatnih efekata: brzinu vozila u prometu nije konstantna, već ovisi o gustoći vozila,

$$v(\rho) = \frac{\rho_m - \rho}{\rho_m} \, v_m \ ,$$

a tok sadrži i dodatni difuzijski član,

$$\phi(\rho) = v(\rho)\rho - \nu\rho_x \ ,$$

gdje je ν kinematička viskoznost. Time jednadžba (7.3) poprima oblik

$$\rho_t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\rho_m - \rho}{\rho_m} \, v_m \rho\right) - \nu\rho_{xx} = 0$$

Uvođenjem bezdimenzionalne gustoće $\tilde{\rho} = \rho/\rho_m$,

$$\tilde{\rho}_t + v_m(\tilde{\rho}(1-\tilde{\rho}))_x - \nu\tilde{\rho}_{xx} = 0$$

Nadalje, uvođenjem funkcije $u = 1 - 2\tilde{\rho}$, jednadžba poprima oblik

$$u_t + v_m u u_x = \nu u_{xx}$$

Konačno, konvecionalno je ovu PDJ zapisati u jedinicama u kojima je $v_m = 1$, pa konačno imamo **Burgersovu jednadžbu**

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx} \tag{7.5}$$

Poissonova jednadžba. Iz Gaussovog zakona za električno polje,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.6}$$

Uvrštavanjem skalarnog potencijala, $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ slijedi **Poissonova jednadžba**

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.7}$$

Specijalno, u vakuumu se ona svodi na **Laplaceovu jednadžbu**,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = 0 \tag{7.8}$$

Jednadžba kontinuiteta. Ako je ρ gustoća neke fizikalne veličine (mase, naboja, itd.), a $\mathbf{J}$ pripadna gustoća struje, tada je očuvanje dotične veličine unutar volumena $\mathcal{V}$ omeđenog kompaktnom plohom $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$ dano integralnom formulom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\mathcal{V}} \rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \tag{7.9}$$

Pripadni diferencijalni oblik sačuvanja glasi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{7.10}$$

Na primjer, ako je ρ gustoća energije, tada je upravo napisana jednadžba zakon očuvanja energije. Iskoristimo li Fourierov zakon koji povezuje lokalni tok topline s gradijentom temperature, $\mathbf{J} = -\kappa \boldsymbol{\nabla} u$ (κ je koeficijent toplinske vodljivosti), te stavimo $\rho = c_p \rho_m u$, gdje je c_p je specifični toplinski kapacitet, a ρ_m masena gustoća materijala (pretpostavljamo da je ρ_m vremenski neovisna), dobivamo **toplinsku jednadžbu** za temperaturu u,

$$u_t - a^2 \boldsymbol{\nabla}^2 u = 0 \tag{7.11}$$

u kojoj smo uveli konstantu termalne difuzivnosti,

$$a^2 = \frac{\kappa}{c_p \rho_m} \tag{7.12}$$

Specijalni, vremenski neovisan slučaj toplinske jednadžbe svodi se na Laplaceovu jednadžbu,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = 0 \tag{7.13}$$

Valna jednadžba. Promatranjem sila na infinitezimalni element niti

$$\mathrm{d}F_u = \rho \, \mathrm{d}x \, u_{tt} = T_0 u_{xx} \, \mathrm{d}x$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \,, \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

U $(1+3)$-dimenzionalnom slučaju,

$$u_{tt} - c^2 \boldsymbol{\nabla}^2 u = 0 \tag{7.14}$$

Schrödingerova jednadžba.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi + V(\mathbf{r})\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \tag{7.15}$$

Heuristički izvod slijedi uobičajenom zamjenom opservabli s operatorima,

$$\mathbf{p} \to -i\hbar \boldsymbol{\nabla} \,, \quad E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

u *nerelativističkom* izrazu za energiju čestice mase m s impulsom $\mathbf{p}$ i potencijalnom energijom V,

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V$$

te s tako dobivenim operatorom djelujemo na valnu funkciju Ψ. Ako ovu zamjenu izvršimo na *relativističkom* izrazu za energiju,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

rezultat je **Klein-Gordonova jednadžba**

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = -\boldsymbol{\nabla}^2 \Psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \tag{7.16}$$

§ 7.2 Klasifikacija PDJ

Za PDJ kažemo da je

- **linearna** ako se nepoznata funkcija u i sve njene parcijalne derivacije u jednadžbi pojavljuju linearno (koeficijenti uz parcijalne derivacije funkcije u su funkcije nezavisnih varijabli, ali ne i same funkcije u ili njenih parcijalnih derivacija), npr.
$$f(x,y)u_{xx} + g(x,y)u_y + h(x,y)u = 0$$
- **semilinearna** ako se sve parcijalne derivacije funkcije u pojavljuju linearno, ali sama funkcija u ne nužno, npr.
$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = f(u)$$
gdje je f bilo koja nelinearna funkcija.
- **kvazilinearna** ako se parcijale derivacije najvišeg reda u jednadžbi pojavljuju linearno s koeficijentima koji su funkcije nezavisnih varijabli, same funkcije u i njenih parcijanih derivacija nižeg reda, npr. neviskozna Burgersova jednadžba,
$$u_t + f(u)u_x = 0 \ ,$$
Korteg-de Vriesova jednadžba
$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \ ,$$
ili jednadžba minimalne plohe
$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$
- **nelinearna** ako ne pripada niti jednoj od gore definiranih kategorija, npr.
$$(u_x)^2 + u_t = 0$$

Općenita linearna PDJ ima oblik
$$L[u] = f \ , \tag{7.17}$$
gdje je L linearni diferencijalni operator, a f neka funkcija. U slučaju kada je $f = 0$ kažemo da je posrijedi **homogena** PDJ. U slučaju linearne PDJ drugog reda, operator L općenito je oblika
$$L = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} B_k \frac{\partial}{\partial x_k} + C \tag{7.18}$$
gdje su A_{ij}, B_j i C neke funkcije. Označimo s $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ svojstvene vrijednosti matrice A, te neka je među njima p pozitivnih, q negativnih i r svojstvenih vrijednosti koje su nula (dakle, $p + q + r = n$). Tada parcijalne diferencijalne jednadžbe dijelimo na

ELIPTIČKE	$p = n$ ili $q = n$,
PARABOLIČKE	$p = n - 1$ i $r = 1$ ili $q = n - 1$ i $r = 1$,
HIPERBOLIČKE	$p = n - 1$ i $q = 1$ ili obratno,
ULTRAHIPERBOLIČKE	$p > 1, q > 1$ i $r = 0$.

Načelno, PDJ može biti različitog tipa u različitim dijelovima prostora i vremena. Primjeri:

- Laplaceova jednadžba (eletrostatika, magnetostatika u odsutnosti struja, stacionarni slučaj toplinske jednadžbe)

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = 0 \tag{7.19}$$

  gdje je $u(\mathbf{r})$ iznos električnog potencijala, magnetskog potencijala ili stacionarne temperature u točki $\mathbf{r}$. Ovo je primjer eliptičke PDJ jer je $A = \text{diag}\,(1, 1, 1)$.

- Toplinska (difuzijska) jednadžba

$$u_t - a^2 \boldsymbol{\nabla}^2 u = 0 \tag{7.20}$$

  gdje je $u(t, \mathbf{r})$ temperatura u točki $(t, \mathbf{r})$. Ovo je primjer paraboličke PDJ jer je $A = \text{diag}\,(0, -a^2, -a^2, -a^2)$.

- Valna jednadžba

$$u_{tt} - c^2 \boldsymbol{\nabla}^2 u = 0\,, \quad c > 0 \tag{7.21}$$

  gdje je $u(t, \mathbf{r})$ elongacija medija od ravnotežnog položaja u točki $(t, \mathbf{r})$. Ovo je primjer hiperboličke PDJ jer je $A = \text{diag}\,(1, -c^2, -c^2, -c^2)$.

- Schrödingerova jednadžba

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\boldsymbol{\nabla}^2 \Psi + V(\mathbf{r})\Psi = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi \tag{7.22}$$

  gdje je $\Psi(t, \mathbf{r})$ valna funkcija čestice mase m s potencijalnom energijom $V(\mathbf{r})$. Ovo je primjer paraboličke PDJ jer je $A = \text{diag}\,(0, \kappa, \kappa, \kappa)$ uz pokratu $\kappa = -\hbar^2/2m$. S druge strane, njen stacionarni (vremenski neovisan) slučaj

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\boldsymbol{\nabla}^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi = E\,\psi \tag{7.23}$$

  je primjer eliptičke PDJ jer je (do na konstantan faktor) $A = \text{diag}\,(1, 1, 1)$.

U slučaju kada je jedna varijabla istaknuta kao "vremenska" (tipično označena s t) domenu nepoznate funkcije u možemo pisati kao produkt $D = \Omega \times I$, gdje je Ω "prostor" koji *evoluira* u vremenu duž vremenskog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$. Ako se sustav od početnog trenutka ili nakon dovoljno dugo vremena više ne mijenja u vremenu, tada kažemo da je postignuto **stacionarno rješenje**, $u_t = 0$.

Početni uvjet je zadavanje oblika tražene funkcije u ili njenih derivacija u početnom trenutku $t = t_0$. Na primjer, otpuštanje napete žice u titranje možemo zapisati

početnim uvjetom tipa $u(0,x) = f(x)$ (početni oblik niti) ili početnim uvjetom tipa $u_t(0,x) = 0$ (nit je mirno otpuštena).

Rubni uvjeti su zadavanje vrijednosti tražene funkcije u ili njenih derivacija zadani na rubovima područja ($\partial\Omega$ s normalom $\mathbf{n}$) na kojem tražimo rješenje. Razlikujemo sljedeće tipove zadavanja rubnih uvjeta:

- **Dirichletov** : $u(t,\mathbf{r}) \overset{\partial\Omega}{=} f(t,\mathbf{r})$;

  npr. učvršćeni kraj titrajuće niti, $u(t,x_0) = 0$; jedan kraj žice kojeg održavamo na konstantnoj temperaturi T_0, $u(t,x_0) = T_0$; uzemljena vodljiva sfera radijusa a u elektrostatičkom problemu, $u(r = a) = 0$, itd.

- **Neumannov** : $\partial_n u(\mathbf{r},t) \overset{\partial\Omega}{=} f(t,\mathbf{r})$;

  npr. držimo li jedan kraj žice toplinski izoliranim, kako je tok topline proporcionalan prostornoj derivaciji u_x (toplinska difuzija je proporcionalna gradijentu temperature), izolaciju uvodimo uvjetom $u_x(x_0,t) = 0$; ako je u elektrostatičkom problemu zadana površinska gustoća naboja $\sigma(x,y)$ u x-y ravnini, tada imamo rubni uvjet $\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{\nabla} u(x,y,0) = -\sigma(x,y)/\epsilon_0$

- **Cauchyjev** : na rubu su istovremeno zadani i Dirichletov i Neumannov rubni uvjet;

- **miješani** : na jednom dijelu ruba imamo Dirichletov, a preostalom dijelu ruba Neumannov tip rubnog uvjeta;

- **Robinov** : $\alpha u(t,\mathbf{r}) + \beta\partial_n u(t,\mathbf{r}) \overset{\partial\Omega}{=} f(t,\mathbf{r})$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  npr. dio ruba je uronjen u rezervoar promjenjive temperature $f(t,\mathbf{r})$; tok topline kroz taj kraj je proporcionalan s razlikom temperature ruba i okoline, $\partial_n u(t,\mathbf{r}) = -\lambda(u(t,\mathbf{r}) - f(t,\mathbf{r}))$, s nekom konstantom $\lambda > 0$, za točke $T(\mathbf{r})$ na dijelu ruba koji je u kontaktu s tim rezervoarom; u primjeru sa žicom imamo npr. $\lambda u(x_0,t) + u_x(x_0,t) = \lambda f(t)$.

Metode rješavanja linearnih PDJ:

- **separacija varijabli**: nepoznatu funkciju $u(x,y,\dots)$ napišemo kao umnožak zasebnih funkcija, od kojih svaka ovisi samo o jednoj varijabli,

  $$u(x,y,\dots) = X(x)Y(y)\cdots$$

  te ovaj ansatz potom uvrstimo u početnu PDJ. U sljedećem koraku pokušavamo odvojiti dio koji ovisi samo o jednoj varijabli (npr. x) na jednu stranu, a ostale izraze na drugu stranu jednadžbe. Takvu jednakost je moguće ispuniti samo ako su obje strane konstantne, odnosno jednake tzv. *separacijskoj konstanti*. Postupak ponavljamo dok početna PDJ nije svedena na skup razdvojenih običnih diferencijalnih jednadžbi.

- **superpozicija** kod linearnih PDJ,

  $$L[u+v] = L[u] + L[v]$$

  Možemo rastaviti problem na sumu jednostavnijih (s jednostavnijim rubnim uvjetima) ili prebaciti nehomogene rubne uvjete u homogene.

- **metoda karakteristika**: orginalnu PDJ pretvorimo u ODJ koju rješavamo duž krivulja povezanih s orginalom PDJ.
- **integralne transformacije**: napravimo (npr. Fourierovu) transformaciju početne PDJ, pri čemu se "riješavamo" dijela derivacija.
- **Greenove funkcije**: kao i kod običnih diferencijalni jednadžbi, nehomogenu PDJ rješavamo pomoću funkcije G koja zadovoljava PDJ

$$LG(x_1, x_2, \dots ; x_1', x_2', \dots) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Jacques Salomon Hadamard je oko 1932. godine uveo pojam **dobro postavljene zadaće** (engl. well posed problem):

- **egzistencija** (rješenje postoji),
- **jedinstvenost** (rješenje je jedinstveno),
- **stabilnost** (rješenje neprekidno ovisi o početnim i rubnim uvjetima).

§ 7.3 PDJ prvog reda

Primjer: jednadžba prometne gužve

$$\rho_t(t,x) + v\rho_x(t,x) = 0\ , \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ t \geq 0\ , \tag{7.24}$$

s početnim uvjetom $\rho(0,x) = f(x)$. Problem ćemo riješiti na nekoliko načina.

Primjenom Fourierovog transformata,

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega,x) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega\ , \quad R(\omega,x) \equiv \mathcal{F}_t[\rho(t,x)](\omega,x)$$

početna PDJ prelazi u ODJ

$$i\omega R + vR_x = 0$$

Uvođenjem pokrate $k = \omega/v$,

$$R_x + ikR = 0$$

$$R(\omega,x) = A(k) e^{-ikx}$$

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega,x) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-ik(x-vt)}\, v\, dk \equiv g(x - vt)$$

Koristeći početni uvjet imamo

$$f(x) = \rho(0, x) = g(x)$$

pa je konačno rješenje

$$\rho(t, x) = f(x - vt)$$

Metoda separacije varijabli: $\rho(t, x) = T(t)X(x)$,

$$X\dot{T} + vX'T = 0$$

$$\frac{1}{v}\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{X'}{X} = \lambda$$

$$\dot{T} - \lambda vT = 0\ , \quad T(t) = Ae^{\lambda vt}$$

$$X' + \lambda X = 0\ , \quad X(x) = Be^{-\lambda x}$$

$$\rho_\lambda(t, x) = C(\lambda)e^{-\lambda(x - vt)}$$

Općenito rješenje je superpozicija svih ovakvih rješenja $\rho_\lambda(t, x)$,

$$\rho(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{-\lambda(x-vt)}\, d\lambda = g(x - vt)\ ,$$

pa opet imamo isti zaključak kao i s transformatom.

§ 7.4 Metoda karakteristika

Promotrimo PDJ prvog reda za nepoznatu funkciju u dvije varijable

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u) \tag{7.25}$$

Metoda koju ćemo izložiti ovdje polazi od analiziranja ove PDJ duž posebno odabranih krivulja u (x, y) ravnini, tzv. **karakteristika**, parametriziranih s parametrom s,

$$x = x(s)\ , \quad y = y(s)$$

te zadanih kao rješenja sustava ODJ,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x, y)\ , \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x, y)$$

Koristeći ovo imamo

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = f(x(s), y(s), u(s))$$

Drugim riječima, početnu PDJ smo zamjenili s ODJ koja je zadovoljena duž karakteristika.

Primjer #1: prometna jednadžba.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1 \ , \quad t(s) = s + t_0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v \ , \quad x(s) = vs + x_0$$

odnosno

$$x_\xi(t) = vt + \xi$$

gdje je $\xi = x_0 - vt_0$. U ovom primjeru karakteristike su paralelni pravci. Jednadžba

$$\frac{d\rho}{ds} = 0$$

nam govori da je ρ konstantna funkcija duž svakog od ovih pravaca, pa koristeći $x_\xi(0) = \xi$ i početni uvjet PDJ imamo

$$\rho(x_\xi(t), t) = \rho(x_\xi(0), 0) = \rho(\xi, 0) = f(\xi) \ ,$$

odnosno

$$\rho(vt + \xi, t) = f(\xi) \ .$$

Eliminiranjem varijable ξ slijedi

$$\rho(t, x) = f(x - vt)$$

u slaganju s ranijim rezultatom. Ovo rješenje nam govori da se početni "profil" gustoće prometa koherentno giba brzinom v u pozitivnom smjeru x-osi.

Primjer #2:

$$u_x - \alpha u_y + \beta u = 0 \ , \quad u|_{y=x} = e^{-\beta x} \sin(x)$$

gdje su $\alpha, \beta > 0$.

$$\dot{x}(s) = 1 \ , \quad \dot{y}(s) = -\alpha$$

$$x(s) = s + x_0 \ , \quad y(s) = -\alpha s + y_0$$

Karakteristike u ovom primjeru su pravci. Kako duž svakog pravca možemo proizvoljno odabrati početnu točku (x_0, y_0) radi jednostavnosti možemo za sve pravce odabrati $y_0 = 0$. Drugim riječima, pravci se međusobno razlikuju početnom točkom x_0 na x-osi, a duž svakog pravca koristimo parametar s. Početna PDJ sada glasi

$$\dot{u} + \beta u = 0$$

čije je rješenje

$$u(s) = u(0)e^{-\beta s}$$

Početni uvjet je zadan duž pravca $y = x$ na kojem vrijedi

$$s + x_0 = -\alpha s$$

$$s = -\frac{x_0}{1 + \alpha}$$

Uvrštavanjem slijedi

$$u\left(-\frac{x_0}{1+\alpha}\right) = u(0)\exp\left(\frac{\beta x_0}{1+\alpha}\right)$$
$$= \exp\left(-\beta\left(-\frac{\beta x_0}{1+\alpha} + x_0\right)\right)\sin\left(\frac{x_0}{1+\alpha}\right)$$
$$u(0) = e^{-\beta x_0}\sin\left(\frac{\alpha x_0}{1+\alpha}\right)$$

pa je

$$u(s) = e^{-\beta(s+x_0)}\sin\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\,x_0\right)$$

Na kraju preostaje prebaciti parametre x_0 i s natrag u koordinate x i y. Kako je

$$s = -\frac{y}{\alpha}\,, \quad x_0 = x - s = x + \frac{y}{\alpha}$$

imamo

$$u(x,y) = e^{-\beta x}\sin\left(\frac{\alpha x + y}{1+\alpha}\right)$$

Potencijalni problemi s ovom metodom nastupaju kada je neka od karakterističnih krivulja tangentna na krivulju ili plohu Γ duž koje je zadan početni (rubni) uvjet. Nadalje, zanimljiv fenomen se javlja kada se karakterističe krivulje sijeku (diskontinuiteti, šokovi). [vidi Jeffrey, 2. poglavlje]

Primjer #3: neviskozna Burgersova jednadžba.

$$u_t + u u_x = 0 \tag{7.26}$$

$$\dot{t}(s) = 1\,, \quad \dot{x}(s) = u$$

Ovom supstitucijom se PDJ svodi na

$$\dot{u} = 0$$

pa je u konstantna duž karakteristika, $u(s) = u_0$. To opet povlači kako su u ovom primjeru karakteristike pravci,

$$t(s) = s + t_0\,, \quad x(s) = u_0 s + x_0$$

Uzmimo radi jednostavnosti $t_0 = 0$, odnosno

$$x(t) = u_0 t + x_0$$

Ovisno o vrijednostima u_0, karakteristike se mogu sjeći, pri čemu rješenje više nije jedinstveno. Pri tom se formira diskontinuitet (*šok*). Kod linearnih PDJ šokovi nastaju samo ako su prisutni u početnom uvjetu, dok se kod nelineranih PDJ mogu formirati i s neprekidnim početnim uvjetom.

§ 7.5 Kanonska forma PDJ drugog reda

Općenita PDJ drugog reda za funkciju $u(x, y)$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{7.27}$$

Imamo matricu

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B/2 \\ B/2 & C-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(C-\lambda) - \frac{B^2}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4} = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(A + C \pm \sqrt{(A+C)^2 + \delta}\right) \ , \quad \delta = B^2 - 4AC$$

Diskriminanta je nenegativna jer

$$(A+C)^2 + \delta = (A-C)^2 + B^2 \geq 0$$

pa su vlastite vrijednosti realne. Imamo sljedeće slučajeve,

$A+C>0$				$A+C<0$			
δ	λ_+	λ_-	tip PDJ	δ	λ_+	λ_-	tip PDJ
>0	>0	<0	hiperbolička	>0	>0	<0	hiperbolička
$=0$	>0	$=0$	parabolička	$=0$	$=0$	<0	parabolička
<0	>0	>0	eliptička	<0	<0	<0	eliptička

U slučaju kada je $A + C = 0$ i pod pretpostavkom da ne vrijedi $A = B = C = 0$, imamo $\delta > 0$, pa je $\lambda_\pm = \pm\sqrt{\delta}/2$, odnosno posrijedi je nužno hiperbolički tip PDJ. Zaključak je da predznak veličine δ jednoznačno određuje tip PDJ.

Svaka od ovih tipova PDJ se može svesti na naredne *kanonske* oblike pomoću prikladne koordinate transformacije $\xi = \xi(x, y)$ i $\eta = \eta(x, y)$,

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) && \text{1. kanonska forma za hiperbolički tip PDJ} \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} &= \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) && \text{2. kanonska forma za hiperbolički tip PDJ} \\ u_{\eta\eta} &= \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) && \text{kanonska forma za parabolički tip PDJ} \\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} &= \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) && \text{kanonska forma za eliptički tip PDJ} \end{aligned}$$

Kako odabrati prikladne koordinate? Promotrimo općenitu koordinatnu transformaciju

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \ , \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_x = (u_\xi)_x \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + (u_\eta)_x \eta_x + u_\eta \eta_{xx} =$$
$$= u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + u_{\xi\eta}\eta_x \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\xi}\xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\eta \eta_{xx} =$$
$$= u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

Slično se pokaže i

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y \eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

Uvrštavanjem u PDJ (7.27) dobivamo

$$\widetilde{A} u_{\xi\xi} + \widetilde{B} u_{\xi\eta} + \widetilde{C} u_{\eta\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{7.28}$$

gdje su

$$\widetilde{A} = A(\xi_x)^2 + B\xi_x \xi_y + C(\xi_y)^2$$
$$\widetilde{B} = 2A\xi_x \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2C\xi_y \eta_y$$
$$\widetilde{C} = A(\eta_x)^2 + B\eta_x \eta_y + C(\eta_y)^2$$

Promotrimo sada primjer 1. kanonske forme za hiperbolički tip PDJ, u kojem zahtijevamo $\widetilde{A} = 0 = \widetilde{C}$. Dakle, imamo sustav jednadžbi

$$A(\xi_x)^2 + B\xi_x \xi_y + C(\xi_y)^2 = 0$$

$$A(\eta_x)^2 + B\eta_x \eta_y + C(\eta_y)^2 = 0$$

Dijeljenjem jednadžbi redom s $(\xi_y)^2$ i $(\eta_y)^2$ dobivamo

$$A(\xi_x/\xi_y)^2 + B(\xi_x/\xi_y) + C = 0$$

$$A(\eta_x/\eta_y)^2 + B(\eta_x/\eta_y) + C = 0$$

Ovo su dvije identične kvadratne jednadžbe s rješenjem

$$\sigma_\pm(x, y) = \frac{-B \pm \sqrt{\delta}}{2A} \ , \quad \delta = B^2 - 4AC$$

Kako bismo dobili smislenu koordinatnu transformaciju moramo odabrati dva različita korjena za ξ_x/ξ_y i η_x/η_y. Time je odabir novih varijabli sveden na rješavanje sustava

$$\xi_x - \sigma_+ \xi_y = 0 \ , \quad \eta_x - \sigma_- \eta_y = 0$$

Ako je PDJ hiperboličkog tipa napisana u 1. kanonskoj formi,

$$u_{xy} = F \ ,$$

tada u 2. kanonsku formu uvijek možemo prijeći jednostavnom koordinatnom transformacijom

$$\xi = x - y \ , \quad \eta = x + y$$
$$\widetilde{A} = -1 \ , \quad \widetilde{B} = 0 \ , \quad \widetilde{C} = 1$$

Koje je geometrijsko značenje veličina ξ_x/ξ_y i η_x/η_y? Posrijedi su nagibi tangenti na krivulje (karakteristike) $\xi(x,y) = \text{konst.}$ i $\eta(x,y) = \text{konst.}$,

$$0 = \mathrm{d}\xi = \xi_x\,\mathrm{d}x + \xi_y\,\mathrm{d}y\ , \qquad \frac{\mathrm{d}y_-}{\mathrm{d}x} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} = -\sigma_-(x,y)$$

$$0 = \mathrm{d}\eta = \eta_x\,\mathrm{d}x + \eta_y\,\mathrm{d}y\ , \qquad \frac{\mathrm{d}y_+}{\mathrm{d}x} = -\frac{\eta_x}{\eta_y} = -\sigma_+(x,y)$$

§ 7.6 Poissonova i Laplaceova jednadžba

Poissonova jednadžba za nepoznatu funkciju $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, glasi

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = f \tag{7.29}$$

Specijalni, homogeni slučaj $f = 0$ je Laplaceova jednadžba. Napomena: ako na primjer promatramo problem skalarnog električnog potencijala točkastog naboja q u ishodištu tada možemo riješavati Poissonovu jednadžbu u cijelom prostoru $\mathbb{R}^3$ s $f(\mathbf{r}) = -q\delta(\mathbf{r})/\epsilon_0$ ili Laplaceovu jednadžbu u $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ uz rubni uvjet koji definira ukupan naboj smješten u ishodište.

Prvo ćemo razmotriti nekoliko osnovnih svojstava Laplaceove jednadžbe. U slučaju kada je $n = 1$ ova PDJ se svodi na elementarnu ODJ, $u''(x) = 0$, pa se možemo ograničiti na slučajeve kada je $n > 1$. Promotrimo problem kada je Ω disk radijusa a u ravnini $\mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = 0\ , \quad r < a$$

$$u(r = a, \varphi) = f(\varphi)$$

Separacijom u polarnom koordinatnom sustavu dobivamo opći oblik rješenja.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \ \Rightarrow\ \frac{r}{R}\,(rR')' = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2$$

Kutna jednadžba glasi

$$\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0$$

uz naredne slučajeve

- $\lambda = 0$, $\Phi(\varphi) = \alpha_0\varphi + \beta_0$
- $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, $\Phi(\varphi) \sim \exp(\pm i\lambda\varphi)$

Zbog konzistentnosti rješenja mora vrijediti periodični uvjet

$$\Phi(2\pi) = \Phi(0)$$

odakle slijedi da je $\alpha_0 = 0$ te $\lambda = n \in \mathbb{Z}$. Radijalna jednadžba ima formu Eulerove diferencijalne jednadžbe i glasi

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

- u slučaju kada je $n \in \mathbb{Z}^\times$ rješenje je oblika

$$R(r) = ar^n + br^{-n}$$

- u slučaju kada je $n = 0$ imamo radijalnu diferencijalu jednadžbu

$$(rR')' = 0$$

čije je rješenje linearna kombinacija konstante i logaritamske funkcije,

$$R(r) = a + b\ln(r)$$

U slučaju kada je ishodište $r = 0$ dio domene na kojoj rješavamo problem, tada zbog regularnosti rješenja uzimamo $b = 0$.

Uz prikladan oblik zapisa konstanti u općem rješenju imamo

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (r/a)^n \big(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\big)$$

Početni uvjet sada glasi

$$f(\varphi) = u(a,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\big)$$

pa su koeficijenti dani pomoću izraza iz Fourierovog reda,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\cos(n\varphi')\,\mathrm{d}\varphi' \ , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\sin(n\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'$$

Uvrštavanjem koeficijenata natrag u razvoj funkcije imamo

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{a}\Big)^n \cos(n(\varphi-\varphi'))\Big)\,\mathrm{d}\varphi'$$

Promotrimo sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos(n\alpha) = \mathrm{Re}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{in\alpha}\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{1-xe^{i\alpha}} - 1\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{\frac{xe^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}}\Big\} =$$

$$= \mathrm{Re}\Big\{\frac{xe^{i\alpha}}{(1-x\cos\alpha) - ix\sin\alpha}\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{\frac{xe^{i\alpha}((1-x\cos\alpha)+ix\sin\alpha)}{1+x^2-2x\cos\alpha}\Big\} =$$

$$= \frac{x\cos\alpha(1 - x\cos\alpha) - x^2\sin^2\alpha}{1 + x^2 - 2x\cos\alpha} = \frac{x\cos\alpha - x^2}{1 + x^2 - 2x\cos\alpha}$$

Dakle,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\left(1 + 2\,\frac{(r/a)\cos(\varphi - \varphi') - (r/a)^2}{1 + (r/a)^2 - 2(r/a)\cos(\varphi - \varphi')}\right)\mathrm{d}\varphi'$$

Time smo izveli tzv. **Poissonovu integralnu formulu za disk**

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \varphi')}\,\mathrm{d}\varphi' \tag{7.30}$$

Valja uočiti da je u središtu diska ($r = 0$),

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'$$

rješenje jednako srednjoj vrijednosti funkcije u na obodu diska! Ovaj zaključak je u principu moguće poopćiti na rješenja Laplaceove jednadžbe u bilo kojem broju dimenzija. Primjetimo, u trivijalnom, $n = 1$ slučaju, rješenja su linearne funkcije, $u(x) = Ax + B$ koje uvijek zadovoljavaju analogno svojstvo,

$$u(0) = \frac{u(x) + u(-x)}{2}$$

Teorem 7.1. (**Teorem o srednjoj vrijednosti**) *Neka je u regularno C^2 rješenje Laplaceove jednadžbe na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ te $\mathcal{K} \subseteq \Omega$ proizvoljna kugla. Tada je srednja vrijednost funkcije u na sferi $\mathcal{S} = \partial\mathcal{K}$ jednaka vrijednosti funkcije u u središtu sfere $\mathcal{S}$.*

Dokaz : Promotrimo prvo $n = 3$ slučaj. Bez smanjenja općenitosti možemo smjestiti ishodište sfernog koordinatnog sustava u središte promatrane sfere $\mathcal{S}$ radijusa $r > 0$. Srednja vrijednost rješenja Laplaceove jednadžbe $u(\mathbf{r})$ na ovoj sferi dana je izrazom

$$\overline{u}(r) \equiv \frac{1}{4\pi r^2}\oint_{\mathcal{S}} u(\mathbf{r})\,\mathrm{d}a = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,u(\mathbf{r})$$

Ako sada deriviramo ovaj izraz po radijalnoj koordinati r, pa iskoristimo Gaussov teorem i Laplaceovu jednadžbu, dobit ćemo

$$\frac{d\overline{u}}{dr} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi r^2}\oint_{\mathcal{S}}\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r}\,\mathrm{d}a =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\oint_{\mathcal{S}}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}u(\mathbf{r})\,\mathrm{d}a = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nabla}^2 u(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = 0$$

gdje smo s $\mathcal{K}$ označili kuglu omeđenu sferom $\mathcal{S}$. To znači da je $\overline{u}(r)$ konstantna funkcija za sve $r > 0$. Nadalje, po pretpostavci je u neprekidna funkcija, odakle slijedi

$$\lim_{r\to 0}\overline{u}(r) = u(\mathbf{0})$$

Naime, sfera $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ je omeđen i zatvoren pa stoga i kompaktan skup. Znamo da svaka neprekidna funkcija na kompaktnom skupu poprima ekstremne vrijednosti, odakle slijedi da na sferi $\mathcal{S}$ radijusa $r > 0$ vrijedi

$$u_{\min}(r) \leq u(r, \theta, \varphi) \leq u_{\max}(r)$$

Integriranjem ove nejednakosti preko sfere $\mathcal{S}$ i dijeljenjem s njenom površinom $4\pi r^2$ dobivamo

$$u_{\min}(r) \leq \overline{u}(r) \leq u_{\max}(r)$$

i stoga

$$|\overline{u}(r) - u(\mathbf{0})| \leq \max\left\{|u_{\min}(r) - u(\mathbf{0})|, |u_{\max}(r) - u(\mathbf{0})|\right\}$$

Konačno, koristeći opet pretpostavku da je u neprekidna funkcija znamo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $|\mathbf{r}| < \delta$ vrijedi

$$|u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{0})| < \epsilon$$

te je stoga i $|\overline{u}(r) - u(\mathbf{0})| < \epsilon$.

Poopćenje zaključka na bilo koji broj dimenzija $n > 3$ jednostavno slijedi: ako je $S(r)$ $(n-1)$–dimenzionalna sfera radijusa r i površine $A_{n-1} r^{n-1}$, tada je

$$\overline{u}(r) = \frac{1}{A_{n-1} r^{n-1}} \oint_{S(r)} u(\mathbf{r})\, \mathrm{d}a = \frac{1}{A_{n-1}} \oint_{S(1)} u(\mathbf{r})\, \mathrm{d}\Omega_{n-1}$$

$$\frac{d\overline{u}}{dr} = \frac{1}{A_{n-1}} \oint_{S(1)} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r}\, \mathrm{d}\Omega_{n-1} = \frac{1}{A_{n-1} r^{n-1}} \oint_{S(r)} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r}\, \mathrm{d}a =$$

$$= \frac{1}{A_{n-1} r^{n-1}} \oint_{S(r)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} u(\mathbf{r})\, \mathrm{d}a = \frac{1}{A_{n-1} r^{n-1}} \int_{K(r)} \boldsymbol{\nabla}^2 u(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V = 0$$

□

Sada ćemo razmotriti formalno pitanje jedinstvenosti rješenja.

Problem. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ omeđen otvoren skup.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}^2 u &= f \quad \text{na} \quad \Omega \\ \alpha u + \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} u &= g \quad \text{na} \quad \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{7.31}$$

gdje je $\alpha\beta \geq 0$ ali ne i $\alpha = \beta = 0$.

Teorem 7.2. **(Jedinstvenost rješenja)** *Problem (7.31) ima jedinstveno rješenje do na konstantu.*

DOKAZ : Neka su u_1 i u_2 dva rješenja problema (7.31). Tada je $w = u_2 - u_1$ rješenje problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}^2 w &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega \\ \alpha w + \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} w &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{7.32}$$

Koristimo Greenov identitet, izveden pomoću Gaussovog teorema,

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\psi) \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi)\, \mathrm{d}V = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}(\psi \boldsymbol{\nabla}\phi)\, \mathrm{d}V - \int_\Omega \psi \boldsymbol{\nabla}^2 \phi\, \mathrm{d}V =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\psi \boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot d\mathbf{a} - \int_\Omega \psi \boldsymbol{\nabla}^2 \phi\, \mathrm{d}V$$

za $\psi = \phi = w$, imamo

$$\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} w|^2 \, \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} (w \boldsymbol{\nabla} w) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \int_\Omega w \boldsymbol{\nabla}^2 w \, \mathrm{d}V \ .$$

Drugi član s desne strane je nula jer je w rješenje Laplaceove PDJ. U svim točkama ruba $\partial\Omega$ u kojima je $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$ prvi član s desne strane je nula. U točkama u kojima je $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$ imamo

$$\int_{\partial\Omega} (w \boldsymbol{\nabla} w) \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\alpha}{\beta} \int_{\partial\Omega} w^2 \, da \leq 0$$

Zaključak je da uvijek vrijedi

$$\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} w|^2 \, \mathrm{d}V \leq 0 \ .$$

Kako je podintegralan izraz s lijeve strane pozitivno semidefinitan, slijedi $|\boldsymbol{\nabla} w| = 0$, odnosno

$$w \stackrel{\Omega}{=} \text{konst.}$$

pa je $u_2 = u_1 + \text{konst.}$ Napomena: u slučaju Dirichletovog rubnog uvjeta ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) nema ove neodređenosti u konstanti jer je $w = 0$. □

Što je sa slučajem $\alpha\beta < 0$? U slučaju ovakvog rubnog uvjeta ne mora vrijediti jedinstvenost rješenja, kao što pokazuje sljedeći primjer. Ako za Ω odaberemo otvorenu kuglu radijusa R, čije je središte smješteno u ishodište koordinatnog sustava, tada su sve tri funkcije

$$u_1 = x \ , \quad u_2 = y \ , \quad u_3 = z \ ,$$

rješenja Laplaceove jednadžbe i zadovoljavaju Robinov rubni uvjet

$$\frac{u_i}{R} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_i = \frac{u_i}{R} - \frac{\partial u_i}{\partial r} \stackrel{\partial\Omega}{=} 0$$

na rubu kugle $\partial\Omega$ za $i = 1, 2, 3$. Primjetimo, ovdje imamo $\alpha = 1/R$, $\beta = -1$, pa je $\alpha\beta < 0$. Kakvim *fizikalnim* situacijama odgovara slučaj $\alpha\beta < 0$? Uzmemo li primjer Robinovog rubnog uvjeta kod (stacionarnog rješenja) toplinske jednadžbe, vidimo kako on odgovara "pogrešnom" predznaku izmjene topline na rubu, odnosno narušenju drugog zakona termodinamike.

Promotrimo na kraju ovog podpoglavlja pitanje stabilnosti rješenja Laplaceove jednadžbe. Ako bismo među skupom varijabli izdvojili jednu kao "vremensku" i zatim promatrali jednadžbu kao vremensku evoluciju, zanima nas da li se rješenje neprekidno mijenja prilikom mijenjanja početnih uvjeta. Uzmimo na primjer Laplaceovu jednadžbu $\boldsymbol{\nabla}^2 u = 0$ na skupu $\Omega = \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle$, s početnim uvjetima

$$u(0, x) = f(x) \ , \quad u_y(0, x) = g(x)$$

pri čemu koordinatu y promatramo kao "vremensku koordinatu", a pravac $y = 0$ kao "početni trenutak". Kao kriterij stabilnosti rješenja ćemo uzeti sljedeću definiciju: za rješenje kažemo da je stabilno ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$|f_1(x) - f_2(x)| + |g_1(x) - g_2(x)| < \delta \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

povlači

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \epsilon$$

Sada ćemo eksplicitnim odabirom niza funkcija (f_n, g_n) (početnih uvjeta) pokazati kako pripadna rješenja nisu stabilna (prema dotičnom kriteriju). Uzmimo kao referentne početne uvjete trivijalne funkcije $f_0(x) = g_0(x) = 0$, čije je pripadno rješenje $u(x) = 0$. Nadalje, funkcije

$$f_n(x) = 0 \ , \quad g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

su za dovoljno veliki n proizvoljno "blizu" početnim uvjetima (f_0, g_0): za svaki $\delta > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_n(x) - f_0(x)| + |g_n(x) - g_0(x)| < \delta$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ i sve $n \geq N$. S druge strane, pripadna rješenja,

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \operatorname{sh}(ny)$$

zbog prisutnosti hiperbolnog sinusa nisu omeđena u "vremenu" y: za svaki $\epsilon > 0$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $y > 0$, takav da je

$$|u_n(x, y) - u_0(x, y)| > \epsilon$$

za neki $x \neq 0$.

§ 7.7 Toplinska jednadžba

$$u_t - a^2 \boldsymbol{\nabla}^2 u = 0 \tag{7.33}$$

Nehomogeni rubni uvjeti. Ovdje ćemo se pozabaviti pitanjem kako nehomogene rubne uvjete prebaciti u homogene, s kojima je u pravilu jednostavnije raditi. Neka je zadan $(1+1)$-dimenzionalni problem grijane žice duljine L s Robinovim rubnim uvjetima

$$\alpha_1 u(t, 0) + \beta_1 u_x(t, 0) = g_1(t)$$

$$\alpha_2 u(t, L) + \beta_2 u_x(t, L) = g_2(t)$$

Trik se sastoji u rastavu nepoznate funkcije u na sumu $u = v + s$, gdje će v biti nova nepoznata funkcija s homogenim rubnim uvjetima, a s pažljivo odabrana pomoćna funkcija. Koristimo ansatz

$$s(t, x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) A(t) + \frac{x}{L} B(t)$$

Funkcije A i B ćemo namjestiti tako da funkcija s zadovoljava gornje rubne uvjete,

$$\alpha_1 s(t, 0) + \beta_1 s_x(t, 0) = g_1(t)$$

$$\alpha_2 s(t, L) + \beta_2 s_x(t, L) = g_2(t)$$

odnosno

$$\alpha_1 A(t) + \beta_1 \left(-\frac{A(t)}{L} + \frac{B(t)}{L} \right) = g_1(t)$$

$$\alpha_2 B(t) + \beta_2 \left(-\frac{A(t)}{L} + \frac{B(t)}{L} \right) = g_2(t)$$

Ovo je linearni sustav jednadžbi za A i B, kojeg nije teško riješiti,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \frac{\beta_1}{L} & \frac{\beta_1}{L} \\ -\frac{\beta_2}{L} & \alpha_2 + \frac{\beta_2}{L} \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2 + \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{L}$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} g_1 & \frac{\beta_1}{L} \\ g_2 & \alpha_2 + \frac{\beta_2}{L} \end{vmatrix} = \alpha_2 g_1 + \frac{\beta_2 g_1 - \beta_1 g_2}{L}$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \frac{\beta_1}{L} & g_1 \\ -\frac{\beta_2}{L} & g_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 g_2 + \frac{\beta_2 g_1 - \beta_1 g_2}{L}$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} , \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta}$$

Sada uvodimo novu funkciju

$$v \equiv u - s$$

pa uvrštvanjem $u = v + s$ početna toplinska PDJ prelazi u nehomogenu

$$-v_t + a^2 v_{xx} = -s_t \ ,$$

pri čemu su rubni uvjeti postali homogeni,

$$\alpha_1 v(t,0) + \beta_1 v_x(t,0) = 0 \ , \quad \alpha_2 v(t,L) + \beta_2 v_x(t,L) = 0$$

a početni uvjet se promjenio,

$$v(0,x) = u(0,x) - s(0,x) = f(x) - s(0,x)$$

Primjer s Dirichletovim rubnim uvjetima: lateralno izoliranoj žici duljine L na jednom kraju održavamo temperaturu T_1, a na drugom T_2,

$$u(t,0) = T_1 \ , \quad u(t,L) = T_2$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \ , \quad \beta_1 = \beta_2 = 0 \ , \quad g_1 = T_1 \ , \quad g_2 = T_2 \ , \quad A = T_1 \ , \quad B = T_2$$

$$s(x) = T_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + T_2 \, \frac{x}{L} = T_1 + \Delta T \, \frac{x}{L} \ , \quad \Delta T = T_2 - T_1$$

Kako je u ovom primjeru $s_t = 0$, PDJ je ostala nepromjenjena, ali se promjenio početni uvjet, $v(0,x) = f(x) - s(x)$.

Primjer s Robinovim rubnim uvjetima: na jednom kraju lateralno izolirane žice duljine L održavamo konstantnu temperaturu T_0, a drugi držimo uronjen u spremnik temperature T_s.

$$u(0,t) = T_0 \ , \quad u_x(L,t) = -k(u(L,t) - T_s) \ , \quad k > 0$$

$$\alpha_1 = 1 \ , \quad \beta_1 = 0 \ , \quad g_1 = T_0 \ ,$$

$$\alpha_2 = k \,, \quad \beta_2 = 1 \,, \quad g_2 = kT_s$$

$$A = T_0 \,, \quad B = \frac{T_0 + kLT_s}{1 + kL}$$

$$s(x) = T_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{T_0 + kLT_s}{1 + kL}\,\frac{x}{L} = T_0 + \frac{kL\Delta T}{1 + kL}\,\frac{x}{L} \,, \quad \Delta T = T_s - T_0$$

$$v(t, xt) = u(t, x) - T_0 - \frac{kL\Delta T}{1 + kL}\,\frac{x}{L}$$

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0 \,, \quad v(0, t) = 0 \,, \quad v_x(t, L) + kv(t, L) = 0$$

Riješimo ovaj problem separacijom, $v(t, x) = T(t)X(x)$,

$$X\dot{T} - a^2 T X'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\dot{T}}{T} = -\lambda^2$$

$$\dot{T} + \lambda^2 a^2 T = 0 \,, \quad X'' + \lambda^2 X = 0$$

Kada je $\lambda \neq 0$ imamo

$$T_\lambda(t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \,, \quad X_\lambda(x) = b_\lambda \cos(\lambda x) + c_\lambda \sin(\lambda x)$$

a za $\lambda = 0$

$$T_0(t) = a_0 \,, \quad X_0(x) = b_0 x + c_0$$

Rubni uvjeti:

$$0 = v_\lambda(t, 0) = a_\lambda b_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} = 0 \,, \quad b_\lambda = 0 \,, \quad v_\lambda = A_\lambda \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t}$$

$$0 = \partial_t v_\lambda(t, L) + kv_\lambda(t, L) = A_\lambda \big(\lambda \cos(\lambda L) + k \sin(\lambda L)\big) e^{-\lambda^2 a^2 t}$$

$$\mathrm{tg}\,(\lambda L) = -\frac{\lambda}{k}$$

Ovu jednadžbu rješavamo numerički. Slučaj $\lambda = 0$ se zbog rubnih uvjeta svodi na trivijalan,

$$0 = a_0 b_0 \,, \quad b_0 = 0$$

$$0 = k a_0 c_0 \,, \quad c_0 = 0$$

Superpozicijom dobivamo

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 a^2 t}$$

Koeficijente A_n možemo izračunati iz početnog uvjeta.

$(1 + 1)$–dimenzionalni slučaj pomoću Fourierovog transformata.

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \,, \quad u(0, x) = f(x) \,, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$U(t, k) = \mathcal{F}_x[u] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

Pretpostavljajući da $u(t,x)$ trne u $x \to \pm\infty$,

$$U(0,k) = \mathcal{F}_x[u(0,x)](k) = \mathcal{F}_x[f(x)](k) \equiv F(k)$$

$$U_t + a^2k^2U = 0 \;, \quad U(t,k) = F(k)e^{-a^2k^2t}$$

$$u(t,x) = \mathcal{F}_k^{-1}[F(k)e^{-a^2k^2t}](t,x) = f * \mathcal{F}_k^{-1}[e^{-a^2k^2t}](t,x)$$

pri čemu je konvolucija s obzirom na varijablu x.

$$\mathcal{F}_k^{-1}[e^{-a^2k^2t}](t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2k^2t+ikx}\,\mathrm{d}k$$

$$-a^2tk^2 + ixk = -a^2t\left(k^2 - i\,\frac{x}{a^2t}\,k + \left(\frac{ix}{2a^2t}\right)^2\right) - \frac{x^2}{4a^2t} =$$

$$= -a^2t\left(k - i\,\frac{x}{2a^2t}\right)^2 - \frac{x^2}{4a^2t}$$

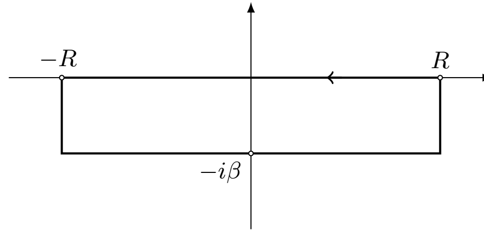
Imamo stoga posla s integralom oblika

$$I_\beta(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k-i\beta)^2}\,\mathrm{d}k = \{p = k - i\beta\} = \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} e^{-\alpha p^2}\,\mathrm{d}p$$

gdje su $\alpha > 0$ (jer je $t > 0$) i β realne konstante. Pretpostavit ćemo da je $\beta > 0$ jer je analiza u slučaju $\beta < 0$ u potpunosti analogna. Promatramo kompleksan integral

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{-\alpha z^2}\,dz$$

gdje je $\mathcal{C}$ pravokutna integracijska krivulja,



Podintegralna funkcija nema singulariteta, pa je

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} e^{-\alpha z^2}\,dz = I_\beta(\alpha) - I_0(\alpha) + I_R + I_{-R}$$

$$I_R = \int_{-\beta}^{0} e^{-\alpha(R+iy)^2}\,i dy \;, \quad I_{-R} = \int_0^{-\beta} e^{-\alpha(-R+iy)^2}\,i\mathrm{d}y$$

Zadnja dva integrala u sumi daju

$$J_R = I_R + I_{-R} = e^{-\alpha R^2} \int_0^{-\beta} \left(e^{i2\alpha Ry} - e^{-i2\alpha Ry}\right) e^{\alpha y^2}\,i\mathrm{d}y =$$

$$= -2e^{-\alpha R^2} \int_0^{-\beta} e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y)\, dy = \{y \to -y\} =$$

$$= -2e^{-\alpha R^2} \int_0^{\beta} e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y)\, \mathrm{d}y$$

Kako je

$$\Big| \int_0^{\beta} e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y)\, dy \Big| \le \int_0^{\beta} \big| e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y) \big|\, \mathrm{d}y \le \int_0^{\beta} e^{\alpha y^2}\, dy = K < \infty\ ,$$

u limesu kada $R \to \infty$ imamo

$$\lim_{R\to\infty} |J_R| \le \lim_{R\to\infty} 2e^{-\alpha R^2} K = 0$$

pa je

$$I_\beta(\alpha) = I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha p^2}\, \mathrm{d}p = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

Koristeći ovaj rezultat imamo

$$\mathcal{F}_k^{-1}[e^{-a^2k^2t}](t,x) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)$$

i stoga

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right) \mathrm{d}s \tag{7.34}$$

Problem. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ omeđen otvoren skup.

$$\begin{aligned} u_t - a^2\boldsymbol{\nabla}^2 u &= f \quad \text{na} \quad \Omega \times \langle 0, T\rangle \\ u &= g \quad \text{na} \quad \Omega \times \{0\} \\ \alpha\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla} u + \beta u &= h \quad \text{na} \quad \partial\Omega \times \langle 0, T\rangle \end{aligned} \tag{7.35}$$

uz funkcije f, g, h i konstante α i β (takve da ne vrijedi $\alpha = \beta = 0$).

Teorem 7.3. (Jedinstvenost rješenja) *Problem (7.35) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz : Pretpostavimo da problem (7.35) ima dva rješenja, u_1 i u_2, te definirajmo $v = u_1 - u_2$. Želimo dokazati da problem

$$\begin{aligned} v_t - a^2\boldsymbol{\nabla}^2 v &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega \times \langle 0, T\rangle \\ v &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega \times \{0\} \\ \alpha\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla} v + \beta v &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega \times \langle 0, T\rangle \end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje $v = 0$. Promotrimo sljedeću funkciju

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_\Omega v^2\, \mathrm{d}V$$

$$E_t(t) = \int_\Omega v v_t\, \mathrm{d}V = a^2 \int_\Omega v\boldsymbol{\nabla}^2 v\, \mathrm{d}V = a^2 \left(\oint_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{\nabla} v)\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} v|^2\, \mathrm{d}V \right)$$

Ako je $\alpha = 0$ tada je prvi član nula,

$$\oint_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{\nabla} v) \cdot d\mathbf{a} = 0\,,$$

a ako je $\alpha \neq 0$ i $\alpha\beta \geq 0$, tada je

$$\oint_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{\nabla} v) \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \oint_{\partial\Omega} v^2 \, \mathrm{d}a \leq 0$$

U oba slučaja slijedi $E_t(t) \leq 0$ i stoga

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$$

Dakle, $E(t) = 0$ za sve t, pa je onda i $v \equiv 0$.

U ostalim slučajevima, kada je $\alpha \neq 0$ i $\alpha\beta < 0$, moramo promotriti drugu derivaciju funkcije $E(t)$,

$$E_{tt}(t) = \int_\Omega (v_t)^2 \, \mathrm{d}V + \int_\Omega v v_{tt} \, \mathrm{d}V = \int_\Omega (v_t)^2 \, \mathrm{d}V + a^2 \int_\Omega v \boldsymbol{\nabla}^2 v_t \, \mathrm{d}V$$

Drugi član,

$$\int_\Omega v \boldsymbol{\nabla}^2 v_t \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{\nabla} v_t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} v) \cdot (\boldsymbol{\nabla} v_t) \, \mathrm{d}V =$$

$$= \oint_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{\nabla} v_t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \oint_{\partial\Omega} v_t(\boldsymbol{\nabla} v) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \int_\Omega v_t \boldsymbol{\nabla}^2 v \, \mathrm{d}V$$

Kako Robinov rubni uvjet

$$\boldsymbol{\nabla} v = -\frac{\beta}{\alpha}\, v$$

vrijedi za sve $t > 0$, imamo

$$\boldsymbol{\nabla} v_t = -\frac{\beta}{\alpha}\, v_t$$

na $\Omega \times \{0\}$ i $\partial\Omega \times [0, T]$. Prema tome

$$\oint_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{\nabla} v_t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \oint_{\partial\Omega} v_t(\boldsymbol{\nabla} v) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \oint_{\partial\Omega} (v v_t - v_t v) \, \mathrm{d}a = 0$$

$$\int_\Omega v v_{tt} \, \mathrm{d}V = a^2 \int_\Omega v_t \boldsymbol{\nabla}^2 v \, \mathrm{d}V = \int_\Omega (v_t)^2 \, \mathrm{d}V$$

i stoga

$$E_{tt}(t) = 2 \int_\Omega (v_t)^2 \, \mathrm{d}V \geq 0$$

Koristeći SCB nejednakost,

$$E E_{tt} - (E_t)^2 = \left(\frac{1}{2} \int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}V \right) \left(2 \int_\Omega (v_t)^2 \, \mathrm{d}V \right) - \left(\int_\Omega v v_t \, \mathrm{d}V \right)^2 =$$

$$= ||v||^2 ||v_t||^2 - \langle v, v_t \rangle^2 \geq 0$$

Time smo dokazali da je i $\ln E(t)$ konveksna funkcija jer

$$(\ln E)_{tt} = \frac{E E_{tt} - (E_t)^2}{E^2}$$

Pretpostavimo da postoji $T > 0$, takav da je $E(t) \neq 0$, odnosno $E(t) > 0$ za sve $t \in \langle 0, T \rangle$. Tada zbog konveksnosti za svaki $\epsilon \in \langle 0, T \rangle$ slijedi

$$\ln \sqrt{E(\epsilon) E(T)} = \frac{\ln E(\epsilon) + \ln E(T)}{2} \geq \ln E \left(\frac{\epsilon + T}{2} \right)$$

U limesu kada $\epsilon \to 0$ desna strane konvergira ka konačnoj vrijednosti $\ln E(T/2)$, dok lijeva strana divergira ka $-\infty$ (jer je $E(0) = 0$), što je u kontradikciji s nejednakošću. Zaključak je kako pretpostavljen interval $\langle 0, T\rangle$ ne postoji, već je $E(t) = 0$ za sve t. Odavde opet slijedi $v \equiv 0$. □

Komentar 7.4. Zašto kod toplinske jednadžbe, za razliku od Laplaceove jednadžbe, imamo jedinstvenost rješenja i u slučaju kada je $\alpha\beta < 0$? Razlog valja potražiti u početnom uvjetu $v = 0$ na $\Omega \times \{0\}$. //

§ 7.8 Valna jednadžba

Teorem 7.5. *Rješenje $(1 + 1)$-dimenzionalne valne jednadžbe $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ uvijek je moguće napisati u obliku*

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{7.36}$$

DOKAZ : Valnu jednadžbu je moguće jednostavno "faktorizirati",

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0$$

Odnosno, uvedemo li varijable

$$\xi = x - ct\ , \quad \eta = x + ct$$

$$t = \frac{\eta - \xi}{2c}\ , \quad x = \frac{\eta + \xi}{2}$$

$$\partial_\xi = t_\xi \partial_t + x_\xi \partial_x = -\frac{1}{2c}\,\partial_t + \frac{1}{2}\,\partial_x = -\frac{1}{2c}\,(\partial_t - c\partial_x)$$

$$\partial_\eta = t_\eta \partial_t + x_\eta \partial_x = \frac{1}{2c}\,\partial_t + \frac{1}{2}\,\partial_x = \frac{1}{2c}\,(\partial_t + c\partial_x)$$

orginalna PDJ se svodi na kanonsku formu

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Ovu jednadžbu možemo pročitati na dva sljedeća načina:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial\xi} = F(\xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial\eta} = G(\eta)$$

$$du = u_\xi\, d\xi + u_\eta\, d\eta = F(\xi)\, d\xi + G(\eta)\, d\eta$$

Integriranjem dobijemo

$$u = f(\xi) + g(\eta) + \text{konst.}$$

Konstanta nastala pri integriranju ne predstavlja nikakav "problem" jer nju možemo po volji uključiti bilo u funkciju f ili funkciju g. Time je pokazana tražena tvrdnja.

Ovu tvrdnju možmo dokazati i pomoću Fourierovog transformata. Neka je

$$U(t,k) = \mathcal{F}_x[u](t,k)$$

Uvrštavanjem u valnu jednadžbu dobivamo ODJ

$$U_{tt}(t,k) + k^2c^2U(t,k) = 0$$

čije je rješenje oblika

$$U(t,k) = A(k)e^{-ikct} + B(k)e^{ikct}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k,t)e^{ikx}\,\mathrm{d}k =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(A(k)e^{ik(x-ct)} + B(k)e^{ik(x+ct)}\Big)\,\mathrm{d}k = f(x-ct) + g(x+ct)$$

□

Ovaj oblik nam govori da se svako rješenje valne jednadžbe sastoji od dva dijela: jednog koji se giba u smjeru pozitivne x-osi (na desno) i drugog koji se giba u smjeru negativne x-osi (na lijevo). Pod *gibanjem* podrazumjevamo sljedeće: promatrajmo npr. u funkciji $f(x-ct)$ neku konkretnu vrijednost koju je ona poprimila onda kada je argument bio jednak nekom broju x_0, $x-ct = x_0$. U nekim drugim trenucima taj isti argument će se pojaviti na onim točkama s koordinatom x koja zadovoljava uvjet $x = x_0 + ct$, dakle kako se pomičemo naprijed u vremenu to su točke s rastućom vrijednosti koordinate x: ona početna vrijednost funkcije $f(x_0)$ se *pomakla na desno*. Analogan način zaključivanja možemo primjeniti i kod funkcije $g(x+ct)$.

Problem: beskonačna žica u početnom trenutku ima oblik $u(0,x) = h(x)$ i vertikalnu brzinu $u_t(0,x) = v(x)$. Pronađite oblik žice u svim kasnijim trenucima.

Prema prethodnom teoremu znamo da je rješenje moguće zapisati u obliku

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$h(x) = u(0,x) = f(x) + g(x)$$

$$u_t(t,x) = \frac{df(x-ct)}{d(x-ct)}\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + \frac{dg(x+ct)}{d(x+ct)}\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial t} = -cf'(\xi) + cg'(\eta)$$

$$v(x) = u_t(0,x) = -c\big(f'(\xi) - g'(\eta)\big)_{t=0}$$

Integriranjem duž koordinate x,

$$\int_0^x v(x')\,\mathrm{d}x' = -c\int_0^x \big(f'(\xi) - g'(\eta)\big)_{t=0}\,\mathrm{d}x'$$

Uočimo kako prelaskom na integraciju po varijabli ξ, odnosno η (pri čemu varijablu t držimo konstantnom) imamo

$$\int_0^x \frac{df(\xi)}{d\xi}\,\mathrm{d}x' = \int_{-ct}^{x-ct} \frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi = f(x-ct) - f(-ct)$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}g(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\,\mathrm{d}x' = \int_{ct}^{x+ct} \frac{\mathrm{d}g(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\,\mathrm{d}\eta = g(x+ct) - g(ct)$$

Odabir donje granice $x = 0$ je ovdje irelevantan. Uvrštavanjem $t = 0$ i dijeljenjem s c dobivamo

$$\frac{1}{c}\int_0^x v(x')\,dx' = -f(x) + g(x) + A\,, \quad A = f(0) - g(0)$$

Rješenje dobivenog sustava glasi

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(h(x) + A\big) - \frac{1}{2c}\int_0^x v(x')\,\mathrm{d}x'$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\big(h(x) - A\big) + \frac{1}{2c}\int_0^x v(x')\,\mathrm{d}x'$$

Prema tome, ukupno rješenje glasi

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(h(x-ct) + h(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} v(x')\,dx' - \int_0^{x-ct} v(x')\,\mathrm{d}x'\right)$$

odnosno

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(h(x-ct) + h(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(x')\,\mathrm{d}x'$$

Ovo je tzv. **D'Alembertova formula**.

Alternativni izvod pomoću Fourierovog transformata.

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}U(t,k)\,\mathrm{d}k$$

Početna PDJ svodi se na ODJ

$$U_{tt} + (ck)^2 U = 0$$

s početnim uvjetima

$$U(0,k) = \mathcal{F}_x[u(0,x)] = \mathcal{F}_x[h(x)] \equiv H(k)$$

$$U_t(0,k) = \mathcal{F}_x[u_t(0,x)] = \mathcal{F}_x[v(x)] \equiv W(k)$$

Rješenje je dano s

$$U(t,k) = H(k)\cos(ckt) + \frac{W(k)}{ck}\sin(ckt)$$

Rješenje valne jednadžbe je stoga

$$u(t,x) = \mathcal{F}_k^{-1}[U(t,k)] = h * \mathcal{F}_k^{-1}[\cos(ckt)] + v * \mathcal{F}_k^{-1}[(\sin(ckt))/(ck)]$$

pri čemu su konvolucije s obzirom na varijablu x.

$$\mathcal{F}_k^{-1}[\cos(ckt)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ickt} + e^{-ickt}}{2}\,e^{ikt}\,\mathrm{d}k =$$

$$= \frac{2\pi}{2\sqrt{2\pi}}\left(\delta(x+ct) + \delta(x-ct)\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\delta(x+ct) + \delta(x-ct)\right)$$

$$\mathcal{F}_k^{-1}[(\sin(ckt))/(ck)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ickt} - e^{-ickt}}{2ick}\, e^{ikt}\, \mathrm{d}k$$

Pripadni kompleksni integrali će imati pol na realnoj osi, pa nam je kauzalnost vodilja. Pokazat će se kako tom fizikalnom zahtijevu odgovara pomicanje pola *iznad* realne osi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iak}}{k}\, dk = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iak}}{k - i\epsilon}\, dk = 2\pi i\, \theta(a)$$

Dakle,

$$\mathcal{F}_k^{-1}[(\sin(ckt))/(ck)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2c}\, (\theta(x+ct) - \theta(x-ct))$$

Konačno,

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\, \frac{\delta(x-s+ct) + \delta(x-s-ct)}{2}\, \mathrm{d}s +$$

$$+\frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} v(s)(\theta(x-s+ct) - \theta(x-s-ct))\, \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2}\, (h(x-ct) + h(x+ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_{-\infty}^{x+ct} - \int_{-\infty}^{x-ct} \right) v(s)\, \mathrm{d}s$$

što se svodi na D'Alembertovo rješenje.

Napomena oko **slabih** rješenja (klasično vs generalizirano rješenje): na primjer, ako je početni uvjet dan funkcijom koja nije derivabilna u nekoj točki, tada je i formalno rješenje "problematično" u toj točki. Međutim, u ovom slučaju možemo govoriti kako je PDJ ispunjena u smislu distribucije,

$$\int \phi L[u] = \int \phi f$$

Promotrimo primjer žice koja je otpuštena u titranje ($v(x) = 0$) iz početnog oblika zadanog neprekidnom funkcijom

$$h(x) = e^{-a|x|}\ , \quad a > 0\ ,$$

koja nije derivabilna u $x = 0$. Naizgled, D'Alembertovo rješenje

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \left(e^{-a|x-ct|} + e^{-a|x+ct|} \right)$$

je "neupotrebljivo" jer u nekim točkama nije derivabilno. Međutim, u smislu distribucije, za svaku test funkciju ϕ

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \phi(t,x)(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) u(t,x) = 0$$

Koristeći

$$\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x)\ , \quad \mathrm{sgn}\,(x) = 2\theta(x) - 1\ , \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sgn}\,(x)}{\mathrm{d}x} = 2\delta(x)$$

$$\partial_x^2\left(e^{-a|x\pm ct|}\right)=\partial_x\left(-ae^{-a|x\pm ct|}\,\mathrm{sgn}\,(x\pm ct)\right)=$$
$$=a^2e^{-a|x\pm ct|}(\mathrm{sgn}\,(x\pm ct))^2-ae^{-a|x\pm ct|}2\delta(x\pm ct)$$
$$\partial_t^2\left(e^{-a|x\pm ct|}\right)=\partial_t\left(\mp ace^{-a|x\pm ct|}\,\mathrm{sgn}\,(x\pm ct)\right)=$$
$$=(ac)^2e^{-a|x\pm ct|}(\mathrm{sgn}\,(x\pm ct))^2-ac^2e^{-a|x\pm ct|}2\delta(x\pm ct)$$

Uvrštavanjem u valnu jednadžbu vidimo da je zadovoljena (u distribucijskom smislu) …

Problem. Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ omeđen otvoren skup.

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2\boldsymbol{\nabla}^2u=f &\quad \text{na}\quad \Omega\times\langle 0,T\rangle\\ u=g &\quad \text{na}\quad \Omega\times\{0\}\quad \text{i}\quad \partial\Omega\times[0,T]\\ u_t=h &\quad \text{na}\quad \Omega\times\{0\}\end{aligned}\tag{7.37}$$

Teorem 7.6. (**Jedinstvenost rješenja**) *Problem (7.37) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz : Pretpostavimo da problem (7.37) ima dva rješenja, u_1 i u_2, te definirajmo $v=u_1-u_2$. Želimo dokazati da problem

$$\begin{aligned} v_{tt}-c^2\boldsymbol{\nabla}^2v=0 &\quad \text{na}\quad \Omega\times\langle 0,T\rangle\\ v=0 &\quad \text{na}\quad \Omega\times\{0\}\quad \text{i}\quad \partial\Omega\times[0,T]\\ v_t=0 &\quad \text{na}\quad \Omega\times\{0\}\end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje $v=0$. Promotrimo sljedeću veličinu (izbor oznake nije slučajan jer se može pokazati da ona proporcionalna energiji u sustavu),

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(v_t^2+c^2|\boldsymbol{\nabla}v|^2\right)dV$$

Prvo ćemo dokazati da je $E(t)$ konstantna u vremenu.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\int_\Omega\left(v_tv_{tt}+c^2(\boldsymbol{\nabla}v)\cdot(\boldsymbol{\nabla}v_t)\right)dV$$

Drugi član možemo rastaviti koristeći Gaussov teorem (ovdje je posrijedi Greenov identitet),

$$\int_\Omega(\boldsymbol{\nabla}v)\cdot(\boldsymbol{\nabla}v_t)\,dV=\int_\Omega\boldsymbol{\nabla}(v_t\boldsymbol{\nabla}v)\,\mathrm{d}V-\int_\Omega v_t\boldsymbol{\nabla}^2v\,\mathrm{d}V=$$
$$=\int_{\partial\Omega}v_t(\boldsymbol{\nabla}v)\cdot d\mathbf{a}-\int_\Omega v_t\boldsymbol{\nabla}^2v\,\mathrm{d}V$$

Kako je $v=0$ na $\partial\Omega$ za sve $t\in[0,T]$, slijedi da je i $v_t=0$ na $\partial\Omega$ za sve $t\in\langle 0,T\rangle$, pa imamo

$$\int_\Omega(\boldsymbol{\nabla}v)\cdot(\boldsymbol{\nabla}v_t)\,\mathrm{d}V=-\int_\Omega v_t\boldsymbol{\nabla}^2v\,\mathrm{d}V$$

Sve skupa, koristeći PDJ,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\int_\Omega v_t\left(v_{tt}-c^2\boldsymbol{\nabla}^2v\right)\mathrm{d}V=0$$

Nadalje, kako je (zbog $v = 0$ na $\Omega \times \{0\}$)

$$\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} v|^2_{t=0}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} (v\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} v)_{t=0}\, \mathrm{d}a - \int_\Omega (v \boldsymbol{\nabla}^2 v)_{t=0}\, \mathrm{d}V = 0\ ,$$

te $v_t = 0$ na $\Omega \times \{0\}$, slijedi $E(0) = 0$, pa je i $E(t) = 0$ za sve t. Podintegralni izraz u definiciji fukcije $E(t)$ je pozitivno semidefinitan, odakle slijedi da su $v_t = 0$ i $|\boldsymbol{\nabla} v| = 0$ svugdje. To znači da je v konstantna funkcija, a zbog rubnih uvjeta ta konstanta mora biti nula. Dakle, dokazali smo da je $v \equiv 0$. □

Napomena: u slučaju kada je $\Omega = \mathbb{R}^3$, dokaz je valjan uz pretpostavku da rješenje trne u beskonačnosti.

Stabilnost rješenja. Pitanje: koliko su rješenja *osjetljiva* na početne uvjete? Uvodimo oznake za $f(x)$

$$||f||_\infty \equiv \sup_x |f(x)|$$

i $w(t, x)$ (za neko fiksno vrijeme $t = \tau$)

$$||w||_{\infty,\tau} \equiv \sup_x |w(\tau, x)|$$

Vrijede sljedeće relacije

$$||f(x-a)||_\infty = ||f(x)||_\infty\ , \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$$||f \pm g||_\infty \le ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

$$\Big| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \Big| \le (b-a)||f||_\infty$$

Pretpostavimo da je $u_1(t, x)$ rješenje valne PDJ s početnim uvjetima $u_1(0, x) = h_1(x)$ i $(u_1)_t(0, x) = v_1(x)$. Nadalje, neka je $u_2(t, x)$ rješenje valne PDJ s nekim drugačijim početnim uvjetima $u_2(0, x) = h_2(x)$ i $(u_2)_t(0, x) = v_2(x)$. Tada funkcija $w(t, x) = u_2(t, x) - u_1(t, x)$ rješava valnu PDJ s početnim uvjetima

$$\begin{aligned} w(0, x) &= h_2(x) - h_1(x) \\ w_t(0, x) &= v_2(x) - v_1(x) \end{aligned}$$

D'Alembertovo rješenje glasi

$$w(t, x) = \frac{1}{2}\Big(\big(h_2(x-ct) - h_1(x-ct)\big) + \big(h_2(x+ct) - h_1(x+ct)\big)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \big(v_2(s) - v_1(s)\big)\, ds$$

Promotrimo ove članove u nekom trentku $t = \tau$,

$$h_2(x \pm c\tau) - h_1(x \pm c\tau) \le ||h_2 - h_1||_\infty$$

$$\frac{1}{2c}\int_{x-c\tau}^{x+c\tau} \big(v_2(s) - v_1(s)\big)\, ds \le \tau \cdot ||v_2 - v_1||_\infty$$

Dakle,

$$|w(\tau, x)| \leq ||h_2 - h_1||_\infty + \tau \cdot ||v_2 - v_1||_\infty$$

odnosno

$$|u_2(\tau, x) - u_1(\tau, x)| \leq ||h_2 - h_1||_\infty + \tau \cdot ||v_2 - v_1||_\infty$$

Konačno, kako ova nejednakost vrijedi za svaki x, vrijedi i

$$||u_2 - u_1||_{\infty,\tau} \leq ||h_2 - h_1||_\infty + \tau \cdot ||v_2 - v_1||_\infty$$

Dakle, razlika među rješenjima neće rasti brže od linearne funkcije u vremenu.

§ 7.9 Maxwellove jednadžbe

Umjesto sustavne analize teorije sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, ovdje ćemo razmotriti samo jedan, ali fizikalno iznimno važan primjer. Klasično elektromagnetsko polje je, između ostalog, moguće prikazati pomoću dva vektorska polja, električnog $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ i magnetskog $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, koja su općenito funkcije prostornih i vremenskih koordinata. Njihovo ponašanje opisano je sustavom od 4 linearne vezane parcijalne diferencijalne jednadžbe, poznate kao **Maxwellove jednadžbe**,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \tag{7.38a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{7.38b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_e \tag{7.38c}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \tag{7.38d}$$

Ovdje su $\{\rho_e, \mathbf{J}_e\}$ redom gustoća električnog naboja i gustoća struje električnih naboja, koje mi *zadajemo* kao "izvore" ovih polja. Ono što ovdje upada u oko je stanovita asimetrija između električnog i magnetskog polja. Na primjer, desna strana druge jednadžbe je nula, dok desna strana prve jednadžbe općenito ne iščezava. Razlog tomu je odsustvo magnetskih monopola, koji za sada nisu pronađeni u prirodi. U slučaju njihovog prisustva, proširene Maxwellove jednadže bi glasile

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \tag{7.39a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m \tag{7.39b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_e \tag{7.39c}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{J}_m \tag{7.39d}$$

gdje su $\{\rho_m, \mathbf{J}_m\}$ redom gustoća magnetskih monopola i pripadna gustoća struje monopolne struje.

Nadalje, jednostavnim brojanjem uočavamo "problem": električno i magnetsko polje zajedno imaju $3+3 = 6$ komponenti, koje su opisane sustavom od $1+1+3+3 =$

8 skalarnih diferencijalnih jednadžbi — sustav je prezadan! Primjetimo, međutim, kako korištenjem treće, odnosno četvrte Maxwellove jednadžbe imamo redom

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}-\frac{\rho_e}{\epsilon_0}\right)=\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial\rho_e}{\partial t}=-\frac{1}{\epsilon_0}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_e+\frac{\partial\rho_e}{\partial t}\right) \tag{7.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}-\mu_0\,\rho_m\right)=\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mu_0\,\frac{\partial\rho_m}{\partial t}=-\mu_0\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_m+\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right) \tag{7.41}$$

Dobivene jednakosti (7.40) i (7.41) mogu se iščitati na dva načina. Pretpostavimo li da električno i magnetsko polje zadovoljavaju prve dvije Maxwellove jednadžbe, tada slijede jednadžbe kontinuiteta za električne naboje i magnetske monopole,

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_e=0\,,\qquad\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_m=0\,. \tag{7.42}$$

Obratno, pretpostavimo da zadane raspodjele naboja i struja $\{\rho_e,\mathbf{J}_e;\rho_m,\mathbf{J}_m\}$ zadovoljavaju gornje, fizikalnim opažanjima opravdane, jednadžbe kontinuiteta. Tada slijedi kako su izrazi u zagradama na lijevim stranama jednakosti (7.40) i (7.41) konstantni u vremenu! Drugim riječima, *ako* su prve dvije Maxwellove jednadžbe zadovoljene barem u jednom (početnom) trenutku, tada iz preostale dvije Maxwellove jednadžbe i jednadžbi kontinuiteta slijedi kako će ovo vrijediti i u svim ostalim trenucima.

Sada možemo jasnije sagledati strukturu Maxwellovih jednadžbi. Problem je zadan raspodjelom naboja i struja $\{\rho_e,\mathbf{J}_e;\rho_m,\mathbf{J}_m\}$ u prostoru i vremenu (takvih da zadovoljavaju jednadžbe kontinuiteta), te početnih uvjeta $\{\mathbf{E}(t_0,\mathbf{r}),\mathbf{B}(t_0,\mathbf{r})\}$ u nekom trenutku $t=t_0$. Ovi početni uvjeti, međutim, nisu proizvoljni, već su *ograničeni* s prve dvije Maxwellove jednadžbe. Ovakve jednadžbe su stoga poznate kao **jednadžbe ograničenja** (engl. constraint equations). Preostale dvije Maxwellove jednadžbe dirigiraju vremenenskom evolucijom polja, pa ih možemo zvati **evolucijske jednadžbe**.

Komentar 7.7. Ponekad nailazimo na pogrešne tvrdnje kako dio Maxwellovih jednadžbi nije neovisan, već se one mogu izveti iz preostalih. Izvor zabune dolazi iz gore izloženog izvoda, kojim se samo pokazuje vremenska neovisnost prve dvije Maxwellove jednadžbe, no ne i to da one uopće moraju biti zadovoljene u jednom trenutku. //

8
Greenove funkcije

U ovom poglavlju ćemo analizirati kako je upotrebom delta funkcije i Fourierovog transformata moguće sustavno tražiti partikularna rješenja običnih i parcijalnih linearnih diferencijalnih jednadžbi.

§ 8.1 Greenove funkcije i ODJ

Promotrimo linearnu nehomogenu ODJ

$$L_x u(x) = f(x) \tag{8.1}$$

gdje je L_x linearni diferencijalni operator (radi kratkoće zapisa izostavljamo uglatu zagradu). Ideja je uvesti tzv. **Greenovu funkciju** $G(x, y)$ koja je rješenje ODJ

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y) \tag{8.2}$$

Tvrdimo da je jedno *partikularno* rješenje dano izrazom

$$u_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') f(x') \,\mathrm{d}x' \tag{8.3}$$

Naime,

$$L_x u_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_x G(x, x') f(x') \,\mathrm{d}x' = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') f(x') \,\mathrm{d}x' = f(x)$$

Primjetimo kako u izboru Greenove funkcije, kao i inače izboru partikularnih rješenja ODJ, postoji sloboda jer je za svako homogeno rješenje $u_{\mathrm{h}}(x)$ funkcija $G(x, x') + u_{\mathrm{h}}(x)$ opet rješenje ODJ (8.2). Prije analize postupka nalaženja Greenovih funkcija ćemo promotriti neka njihova općenita svojstva. Često ćemo imati posla s operatorima L_x koji su translacijski invarijantni, u smislu da je $L_{x+a} = L_x$ za svaki $a \in \mathbb{R}$, odnosno kada je

$$L_x = a_0 + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \ldots$$

gdje su $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ neke konstante.

U slučaju kada imamo translacijski invarijantan diferencijalni operator L_x (na cijelom $\mathbb{R}$), tada je jedan konzistentan odabir Greenove funkcije ona koja je i sama translacijski invarijantna, u smislu da je

$$G(x, x') = G(x - x')$$

Naime, ako uvedemo translatiranu Greenovu funkciju $\widetilde{G}_a(x, x') \equiv G(x + a, x' + a)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$L_x \widetilde{G}_a(x, x') = L_{x+a} G(x + a, x' + a) = \delta((x + a) - (x' + a)) = \delta(x - x')$$

Stoga, razlika $\widetilde{G}_a(x, x') - G(x, x')$ je rješenje pripadne homogene ODJ,

$$L_x \left(\widetilde{G}_a(x, x') - G(x, x') \right) = 0$$

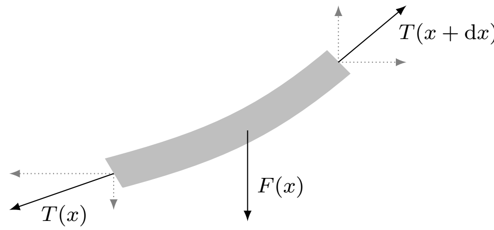
pa je jedan mogući odabir $\widetilde{G}_a(x, x') = G(x, x')$ za svaki $a \in \mathbb{R}$. Primjetimo, u jednakosti $G(x, x') = G(x + a, x' + a)$ za svaki x' možemo odabrati $a = -x'$, odakle slijedi $G(x, x') = G(x - x', 0)$. Drugim riječima, $G(x, x') = G(x - x')$. U ovom slučaju rješenje ODJ (8.1) možemo pisati u obliku

$$u(x) = u_{\mathrm{h}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x') f(x') \mathrm{d}x' = u_{\mathrm{h}}(x) + \sqrt{2\pi}\, (G * f)(x) \tag{8.4}$$

Razmotrit ćemo dva jednostavna fizikalna primjera u kojima su operatori pripadne ODJ translacijski invarijantni.

Primjer # 1: **oblik visećeg mosta**

O dva stupa, razmaknuta na udaljenosti L, obješena je nit i o nju horizontalna cesta. Pretpostavljamo da su i nit i cesta načinjene od homogenih materijala, te njihove linearne gustoće iznose μ_{nit} i μ_{cesta}. Označimo funkciju elongacije niti s $u(x)$. Dijagram sila na element niti,



Po pretpostavci imamo statičnu situaciju, pa su sile na element niti izjednačene,

$$T_x(x + \mathrm{d}x) - T_x(x) = 0$$
$$T_y(x + \mathrm{d}x) - T_y(x) = F(x)$$

gdje $F(x) > 0$ ukupna gravitacijska sila na promatrani element. Iz prve jednadžbe slijedi da je horizontalna komponenta napetosti konstantna,

$$0 = T_x(x + \mathrm{d}x) - T_x(x) = \mathrm{d}T_x(x) \quad \Rightarrow \quad T_x(x) = \text{konst.} \equiv T_0$$

Za vertikalnu komponentu imamo

$$T_y(x + \mathrm{d}x) - T_y(x) = \mathrm{d}T_y(x) = \mathrm{d}(T_0 \,\mathrm{tg}\, \theta(x)) = \mathrm{d}(T_0 u'(x)) = T_0 u''(x)\,\mathrm{d}x$$

U sili $F(x)$ se nalaze dva doprinosa,

$$F(x) = (\mu_{\mathrm{nit}}\,\mathrm{d}\ell + \mu_{\mathrm{cesta}}\,\mathrm{d}x)g$$

Pretpostavit ćemo da je $\mu \equiv \mu_{\mathrm{cesta}} \gg \mu_{\mathrm{nit}}$, odnosno $\mu_{\mathrm{nit}} = 0$ pa imamo običnu diferencijalnu jednadžbu

$$u''(x) = f(x) \;, \tag{8.5}$$

gdje je u našem problemu $f(x) = \mu g / T_0 = \text{konst}$. Iz diskusije u poglavlju o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama može se vidjeti kako je ovo stacionarni (vremenski neovisan) slučaj nehomogene valne jednadžbe*. Pretpostavljamo da su krajevi niti učvršćeni, te koordinatni sustav postavljen tako da je

$$u(0) = u(L) = 0 \tag{8.6}$$

Rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe glasi

$$u_{\mathrm{h}}(x) = Ax + B$$

gdje su A i B neke konstante. Partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe (8.5) tražimo pomoću Greenove funkcije,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, G(x, x') = \delta(x - x')$$

Direktnim integriranjem slijedi

$$\frac{\partial}{\partial x}\, G(x, x') = \theta(x - x') + \alpha(x')$$

odnosno

$$G(x, x') = (x - x')\theta(x - x') + \alpha(x')x + \beta(x')$$

gdje su α i β funkcije čiji odabir korespondira slobodi odabira Greenove funkcije, općenito definirane do na dodavanje rješenja pripadne homogene diferencijalne jednadžbe. Na primjer, odaberemo li

$$G(0, x') = G(L, x') = 0 \;, \quad \forall\, x' \in [0, L] \;,$$

imamo

$$\beta(x') = 0 \;, \quad \alpha(x') = \frac{x' - L}{L}$$

*u slučaju kada nema ceste, $\mu_{\mathrm{cesta}} = 0$, nit poprima krivulju oblika *lančanice*, zadanu funkcijom $\mathrm{ch}\,(x)$

pa je

$$G(x,x') = (x-x')\theta(x-x') + \frac{x}{L}\,(x'-L)$$

Ukupno rješenje je dano s

$$u(x) = Ax + B + \int_0^L G(x,x')f(x')\,\mathrm{d}x'$$

Kada u obzir uzmemo početne uvjete problema i naš odabir Greenove funkcije, dobivamo $A = B = 0$, pa je u konačnici ukupno rješenje dano pojednostavljenim izrazom

$$u(x) = \int_0^L G(x,x')f(x')\,\mathrm{d}x'$$

Uvrštavanjem funkcije f iz našeg problema imamo

$$u(x) = \frac{\mu g}{T_0}\int_0^x (x-x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\mu g}{T_0}\,\frac{x}{L}\int_0^L (x'-L)\,\mathrm{d}x' =$$

$$= \frac{\mu g}{T_0}\left(x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{xL}{2} - xL\right) = \frac{\mu g}{2T_0 L^2}\big((x/L)^2 - (x/L)\big)$$

Nit, dakle, poprima oblik *parabole*.

Na kraju ovog primjera ćemo razmotriti na koji način odabir Greenove funkcije utječe na konačni zapis rješenja. Kako je u diferencijalnoj jednadžbi (8.5) operator L_x translacijski invarijantan, možemo pisati $G(x,x') = G(x-x')$. Nadalje, valja uočiti da je

$$\frac{\partial G(x-x')}{\partial x} = \frac{\partial G(x-x')}{\partial (x-x')}\,\frac{\partial (x-x')}{\partial x} = \frac{\partial G(x-x')}{\partial (x-x')}$$

$$\frac{\partial G(x-x')}{\partial x'} = \frac{\partial G(x-x')}{\partial (x-x')}\,\frac{\partial (x-x')}{\partial x'} = -\frac{\partial G(x-x')}{\partial (x-x')}$$

pa vrijedi

$$\frac{\partial G(x-x')}{\partial x} = -\frac{\partial G(x-x')}{\partial x'}\,, \qquad \frac{\partial^2 G(x-x')}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G(x-x')}{\partial x'^2}$$

Drugim riječima, u diferencijalnoj jednadžbi za Greenovu funkciju možemo derivaciju po x zamjeniti s derivacijom po x',

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\,G(x-x') = \delta(x-x')$$

Pretpostavimo sada da je promatrani problem zadan na intervalu $I = [a,b]$, te promotrimo identitet

$$\int_a^b \left(\phi\,\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\,\psi - \psi\,\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\,\phi\right)\mathrm{d}x' = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x'}\left(\phi\,\frac{\partial}{\partial x'}\,\psi - \psi\,\frac{\partial}{\partial x'}\,\phi\right)\mathrm{d}x' =$$

$$= \left(\phi\,\frac{\partial}{\partial x'}\,\psi - \psi\,\frac{\partial}{\partial x'}\,\phi\right)\Big|_{x'=a}^{x'=b}$$

Uvrstimo li $\phi = u(x')$ i $\psi = G(x-x')$, imamo

$$u(x) = \int_a^b G(x-x')f(x')\,\mathrm{d}x' + \\ + \left(u(x')\,\frac{\partial G(x-x')}{\partial x'} - G(x-x')\,\frac{\partial u(x')}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=a}^{x'=b} \tag{8.7}$$

U literaturi se, ovisno o tipu zadanih početnih ili rubnih uvjeta, obično susrećemo s narednim konvencionalnim izborima Greenovih funkcija:

a) Ako su zadane vrijednosti funkcije $u(x)$ u točkama $x = a$ i $x = b$, tada obično biramo tzv. **Dirichletovu Greenovu funkciju**

$$G_D(x-x') = 0 \quad \text{za} \quad x' = a, b$$

U ovom slučaju se općeniti izraz malo pojednostavljuje,

$$u(x) = \int_a^b G_D(x-x')f(x')\,\mathrm{d}x' + u(x')\,\frac{\partial G_D(x-x')}{\partial x'}\Big|_{x'=a}^{x'=b} \tag{8.8}$$

b) Ako su zadane vrijednosti derivacije $u'(x)$ u točkama $x = a$ i $x = b$, tada obično biramo tzv. **Neumannovu Greenovu funkciju**. Naivno, alternativni izbor glasi

$$\frac{\partial G_N(x-x')}{\partial x'} \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{za} \quad x' = a, b$$

Međutim, ovo nije konzistentno sa svojstvima Greenove funkcije jer

$$\frac{\partial G_N(x-x')}{\partial x'}\Big|_{x'=a}^{x'=b} = \int_a^b \frac{\partial^2 G_N(x-x')}{\partial x'^2}\,\mathrm{d}x' = \int_a^b \delta(x-x')\,\mathrm{d}x' = 1$$

Prema tome, konzistentan izbor glasi

$$\frac{\partial G_N(x-x')}{\partial x'} = \frac{x'}{b-a} \quad \text{za} \quad x' = a, b$$

U ovom slučaju se općeniti izraz svodi na

$$u(x) = \int_a^b G_N(x-x')f(x')\,\mathrm{d}x' + \\ + \frac{bu(b) - au(a)}{b-a} + G_N(x-x')\,\frac{\partial u(x')}{\partial x'}\Big|_{x'=a}^{x'=b} \tag{8.9}$$

Ovdje valja još jednom naglasiti kako je su navedeni izbori samo *konvencionalni.* Jedino što je na kraju bitno jest da *ukupno* rješenje (s kako god odabranom Greenovom funkcijom) zadovoljava zadane početne uvjete.

Primjer # 2: **tjerano-gušeni harmonički oscilator**

$$\ddot{x}(t) + 2b\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

$$L_t = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2b\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2$$
$$L_t G(t,t') = \delta(t-t')$$

U pronalaženju Greenove funkcije poslužit ćemo se Fourierovim transformatom,

$$G(t,t') = G(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(\omega) e^{i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega$$

$$L_t G(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(\omega)(-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2) e^{i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega$$
$$= \delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}\omega$$

Stoga, jedan konzistentan odabir je

$$\widetilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2}\ , \quad G(t,t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2}\,\mathrm{d}\omega$$

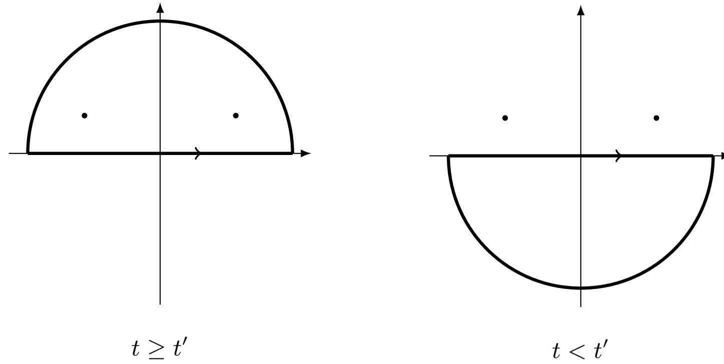
Promatramo integral

$$\oint \frac{e^{iz(t-t')}}{-z^2 + 2biz + \omega_0^2}\,\mathrm{d}z$$

Imamo dva pola prvog reda u točkama

$$z_\pm = ib \pm \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \equiv ib \pm \gamma$$

Za slabo gušeni oscilator imamo $\omega_0 > b$, pa je $\gamma \in \mathbb{R}$



$t \geq t'$ $\qquad$ $t < t'$

$$\mathrm{Res}(z_+) = \lim_{z \to z_+} \frac{e^{iz(t-t')}}{-(z - z_-)} = -\frac{1}{2\gamma}\, e^{(-b+i\gamma)(t-t')}$$
$$\mathrm{Res}(z_-) = \lim_{z \to z_-} \frac{e^{iz(t-t')}}{-(z - z_+)} = \frac{1}{2\gamma}\, e^{(-b-i\gamma)(t-t')}$$

Primjetimo, u slučaju kada je $t < t'$ integral iščezava. Sve skupa, imamo

$$\begin{aligned} G(t,t') &= \frac{i}{2\gamma}\, e^{-b(t-t')}(-2i)\sin(\gamma(t-t'))\theta(t-t') = \\ &= \frac{1}{\gamma}\, e^{-b(t-t')}\sin(\gamma(t-t'))\theta(t-t') \\ x_p(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(t')\,\frac{\sin(\gamma(t-t'))}{\gamma}\, e^{-b(t-t')}\, dt' \end{aligned}$$

Primjetimo kako su imaginarni dijelovi polova Greenove funkcije odgovorni za eksponencijalno trnjenje rješenja u vremenu. U slučaju kada bi trenje, odnosno "gušenje" bilo odsutno ($b = 0$), polovi bi došli na realnu os. Praktičan način rješavanja ovakvog idealiziranog slučaja jest uvođenje nekog malog trenja ($b = \epsilon$), čime polove pomičemo iznad realne osi, potom pronalaženje Greenove funkcije i partikularnog rješenja, te na kraju promatranje limesa $b \to 0$.

Nadalje, valja uočiti pojavu θ-funkcije u Greenovoj funkciji: to znači da rješenje "pazi" na *kauzalnost.* Tjeranje koje valjska sila izvrši na oscilatoru u trenutku t' ne može utjecati na ponašanje oscilatora u trenutku t ako je $t' > t$. Drugim riječima, uzrok prethodi učinku.

U slučaju kada imamo problem u kojem nije jasno što bi "igralo ulogu" trenja pomoću kojeg ćemo pomaknuti polove s realne osi, možemo se poslužiti argumentom kauzalnosti, dodajući uvjet poput

$$G(t,t') = 0 \quad \text{za} \quad t < t' \tag{8.10}$$

Ovdje je t vrijeme u kojem promatramo vrijednost nepoznate funkcije u, a t' vrijeme u kojem je vanjska pobuda djelovala na sustav. Gornji zahtijev govori kako pobuda ne može djelovati na ponašanje sustava *prije* trenutka u kojem je djelovala.

Primjer # 3: **linearna ODJ drugog reda** na intervalu $x \in [a,b]$

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

Dijeljenjem cijele jednadžbe s $A(x)$ i množenjem s funkcijom

$$p(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{B(\xi)}{A(\xi)}\, d\xi\right)$$

jednadžba se svodi na tzv. Sturm-Liouvilleov oblik

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - s(x)y = f(x)$$

Tražimo pripadnu Greenovu funkciju

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right) - s(x)G(x,x') = \delta(x-x')$$

Prvo ćemo dokazati da derivacija $\partial_x G(x,x')$ ima prekid duž linije $x = x'$. Integriranjem gornje jednadžbe na intervalu $[x'-\epsilon, x'+\epsilon]$ dobivamo

$$p(x)\,\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\bigg|_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} - \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} s(x)G(x,x')\,\mathrm{d}x = 1$$

Puštanjem limesa $\epsilon \to 0$ dobivamo

$$\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\Big|_{x=x'+0} - \frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\Big|_{x=x'-0} = \frac{1}{p(x')} \tag{8.11}$$

Sada tražimo Greenovu funkciju oblika

$$G(x,x') = \begin{cases} \alpha(x')u_1(x)\,, & x \le x' \\ \beta(x')u_2(x)\,, & x \ge x' \end{cases}$$

gdje su u_1 i u_2 rješenja homogene diferencijalne jednadžbe. Imamo dva zahtijeva,

- neprekidnost Greenove funkcije $G(x,x')$ u $x = x'$,

$$\beta(x)u_2(x) - \alpha(x)u_1(x) = 0$$

- prekid funkcije $\partial_x G(x,x')$ u $x = x'$,

$$\beta(x)u_2'(x) - \alpha(x)u_1'(x) = \frac{1}{p(x)}$$

Rješenje ovog sustava je

$$\alpha(x) = \frac{u_2(x)}{p(x)W(x)}\,, \quad \beta(x) = \frac{u_1(x)}{p(x)W(x)}\,, \quad W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$$

pa je

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{u_2(x')}{p(x')W(x')}\,u_1(x)\,, & x \le x' \\ \frac{u_1(x')}{p(x')W(x')}\,u_2(x)\,, & x \ge x' \end{cases}$$

Kako iz ranijih diskusija već znamo kako je Wronskijan oblika

$$W(x') = W_0 \exp\left(-\int_a^{x'} \frac{B(\xi)}{A(\xi)}\,d\xi\right)\,, \quad W_0 = W(a)$$

slijedi da je nazivnik u gornjim izrazima konstantan, $p(x')W(x') = W_0$, pa je partikularno rješenje oblika

$$y_P(x) = \int_a^b G(x,x')f(x')\,\mathrm{d}x' =$$

$$= \frac{u_2(x)}{W_0}\int_a^x u_1(x')f(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{u_1(x)}{W_0}\int_x^b u_2(x')f(x')\,\mathrm{d}x'$$

§ 8.2 Kramers-Kronigove relacije

KK relacije nam govore kako disperzivna i apsorpcijska svojstva medija nisu neovisna.

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, G(\omega) e^{i\omega t}$$

Zahtijev **kauzalnosti**,

$$G(t < 0) = 0 \tag{8.12}$$

jer želimo $G(t - t') \sim \theta(t - t')$. Promatramo kompleksni integral,

$$\oint \mathrm{d}\omega\, G(\omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, G(\omega) e^{i\omega t} + \int_{\Gamma} \mathrm{d}\omega\, G(\omega) e^{i\omega t}$$

Ako je $G(\omega)$ analitička za $\mathrm{Im}(\omega) \leq 0$, te trne dovoljno brzo, tada je

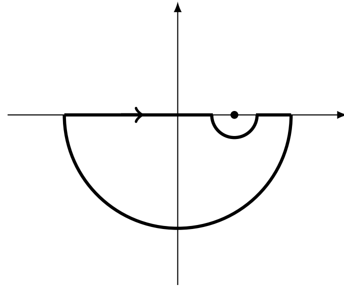
$$\sum \mathrm{Res} = 0\ , \quad \int_{\Gamma} = 0$$

pa je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, G(\omega) e^{i\omega t} = 0$$

za $t < 0$. Sada promatramo integral

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} \frac{G(\omega')\,\mathrm{d}\omega'}{\omega - \omega'} = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega')\,\mathrm{d}\omega'}{\omega - \omega'} - i\pi \mathrm{Res}(\omega)$$



$$\mathrm{Res}(\omega) = -G(\omega)$$

Dakle,

$$G(\omega) = G_R(\omega) + iG_I(\omega) = \frac{i}{\pi}\, \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega')\,\mathrm{d}\omega'}{\omega - \omega'}$$

$$G_R(\omega) = \frac{1}{\pi}\, \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_I(\omega')\,\mathrm{d}\omega'}{\omega' - \omega} \tag{8.13}$$

$$G_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\, \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_R(\omega')\,\mathrm{d}\omega'}{\omega' - \omega} \tag{8.14}$$

§ 8.3 Greenove funkcije i PDJ

Ovdje ćemo pronaći Greenove funkcije osnovnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U računima ćemo se služiti sljedećim rezultatom.

Lema 8.1. *Neka je $\boldsymbol{a}$ konstantan vektor. Tada je*

$$\boldsymbol{\nabla} e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} = \boldsymbol{a}\, e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}}\,, \qquad \boldsymbol{\nabla}^2 e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} = \boldsymbol{a}^2\, e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} \tag{8.15}$$

DOKAZ :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} &= (\hat{\boldsymbol{x}}\,\partial_x + \hat{\boldsymbol{y}}\,\partial_y + \hat{\boldsymbol{z}}\,\partial_z)\exp(a_x x + a_y y + a_z z) = \\
&= (a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\hat{\boldsymbol{z}})e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} = \boldsymbol{a}\, e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} \\
\boldsymbol{\nabla}^2 e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\exp(a_x x + a_y y + a_z z) = \\
&= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}} = \boldsymbol{a}^2\, e^{\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

□

Poissonova jednadžba.

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = f$$

Uvodimo Greenovu funkciju,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

s pripadnim Fourierovim transformatom,

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \widetilde{G}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\mathrm{d}^3 k$$

Komentar 8.2. Kada u transformatu računamo produkt $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, valja nekako smjestiti vektor $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ u k-prostor (rezultat na kraju ne ovisi o tom odabiru). Pri tom uvijek možemo orjentirati koordinatni sustav k-prostora na način koji je nama pogodan (npr. stavljanjem z-osi duž vektora $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$). //

$$\boldsymbol{\nabla}^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \widetilde{G}(\mathbf{k})(i\mathbf{k})^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\mathrm{d}^3 k = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\mathrm{d}^3 k$$

$$\widetilde{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{1}{\mathbf{k}^2}$$

Koristeći pokratu $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ imamo

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\mathbf{k}^2}\,\mathrm{d}^3 k =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\,k^2\int_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\,\frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2} =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\beta\,e^{ikR\beta} = -\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\frac{2\sin(kR)}{kR}\,\mathrm{d}k$$

Posljednji integral,

$$\int_0^{\infty}\frac{2\sin(kR)}{kR}\,\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(kR)}{kR}\,\mathrm{d}k = \{kR = p\} = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(p)}{p}\,\mathrm{d}p = \frac{\pi}{R}$$

Sve skupa,

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Odnosno, općenitije

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

za svaku funkciju F koja je rješenje Laplaceove jednadžbe,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 F(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0$$

Napomena: $\boldsymbol{\nabla}$ vs $\boldsymbol{\nabla}'$,

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial x} = \frac{\partial f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial(x-x')}\,\frac{\partial(x-x')}{\partial x} = \frac{\partial f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial(x-x')}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial x'} = \frac{\partial f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial(x-x')}\,\frac{\partial(x-x')}{\partial x'} = -\frac{\partial f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial(x-x')}$$

$$\boldsymbol{\nabla}' f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,, \quad \boldsymbol{\nabla}'^2 f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \boldsymbol{\nabla}^2 f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Kako izgleda *ukupno* rješenje? Uvrštavajući u Greenov identitet

$$\int_\Omega (\phi\boldsymbol{\nabla}'^2\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}'^2\phi)\,\mathrm{d}\tau' = \int_{\partial\Omega}(\phi\boldsymbol{\nabla}'\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}'\phi)\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}'$$

$\phi = u(\mathbf{r}')$ i $\psi = G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, imamo

$$\int_\Omega (u(\mathbf{r}')\boldsymbol{\nabla}'^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\boldsymbol{\nabla}'^2 u(\mathbf{r}'))\,\mathrm{d}\tau' =$$

$$= \int_\Omega \big(u(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\big)\,\mathrm{d}\tau' = u(\mathbf{r}) - \int_\Omega G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

Sve skupa

$$u(\mathbf{r}) = \int_\Omega G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' + \int_{\partial\Omega}\big(u(\mathbf{r}')\boldsymbol{\nabla}'G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\boldsymbol{\nabla}'u(\mathbf{r}')\big)\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}'$$

Imamo slobodu u izboru Greenove funkcije G:

a) Dirichletova Greenova funkcija

$$G_D(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0 \quad \text{za} \quad \mathbf{r}' \in \partial\Omega$$

Gornji izraz u ovom slučaju glasi

$$u(\mathbf{r}) = \int_\Omega G_D(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{r}')\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}' G_D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}a'$$

Na primjer, ako je rubni uvjet (kao što je u slučaju uzemljenih vodljivih ploha u elektrostatici)

$$u(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{za} \quad \mathbf{r}' \in \partial\Omega$$

tada imamo jednostavan izraz

$$u(\mathbf{r}) = \int_\Omega G_D(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

Na ovakav slučaj nailazimo u elektrodinamici ili klasičnoj gravitaciji, kada su izvori lokalizirani, pa potencijal trne u beskonačnosti. Promatramo li problem na prostoru $\Omega = \mathbb{R}^3$, tada gore dobivena Greenova funkcija zadovoljava traženi Dirichletov rubni uvjet,

$$-\frac{1}{4\pi} \lim_{r'\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 0$$

Koristeći uobičajene oznake iz elektrodinamike, $u \to V$ i $f \to -\rho/\epsilon_0$, imamo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

b) Neumannova Greenova funkcija. Naivno, alternativan izbor glasi

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}' G_N(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{za} \quad \mathbf{r}' \in \partial\Omega$$

Međutim, ovo nije konzistentno sa svojstvima Greenove funkcije,

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}a' = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}'^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' = \int_\Omega \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' = 1$$

Prema tome, konzistentan izbor glasi

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}' G_N(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{A} \quad \text{za} \quad \mathbf{r}' \in \partial\Omega$$

gdje je A površina rubne plohe $\partial\Omega$. U ovom slučaju imamo

$$u(\mathbf{r}) = \langle u \rangle_{\partial\Omega} + \int_\Omega G_N(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' - \int_{\partial\Omega} G_N(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}' u(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}a'$$

gdje je konstanta

$$\langle u \rangle_{\partial\Omega} \equiv \frac{1}{A} \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

prosječna vrijednost funkcije u na rubu $\partial\Omega$. Ona je nevažna jer je u slučaju Neumannovog rubnog uvjeta rješenje Poissonove jednadžbe određeno (jedinstveno) do na konstantu.

Nehomogena toplinska jednadžba.

$$u_t - a^2\boldsymbol{\nabla}^2 u = f$$

$$LG(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\ , \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\boldsymbol{\nabla}^2$$

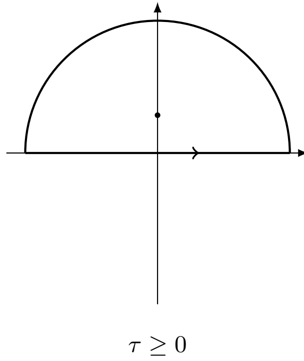
Koristimo pokrate $\tau = t - t'$ i $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

$$G(\tau,\mathbf{R}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{2\pi}}\, \widetilde{G}(\omega,\mathbf{k}) e^{i(\omega\tau+\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}$$

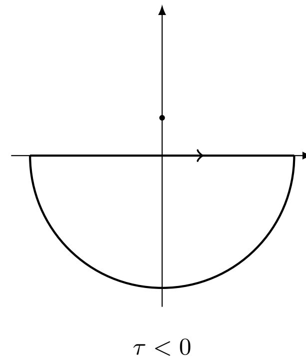
$$(i\omega + a^2\mathbf{k}^2)\widetilde{G} = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$$\widetilde{G}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{i\omega + a^2\mathbf{k}^2}$$

$$G(\tau,\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{e^{i(\omega\tau+\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}}{i\omega + a^2\mathbf{k}^2}$$



$\tau \geq 0$



$\tau < 0$

$$G(\tau,\mathbf{R}) = \frac{\theta(\tau)}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\, e^{-a^2\mathbf{k}^2\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$$

$$-a^2\mathbf{k}^2\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} = -a^2\tau\left(\mathbf{k}^2 - i\,\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}{a^2\tau} + \left(-\frac{i\mathbf{R}}{2a^2\tau}\right)^2\right) - \frac{\mathbf{R}^2}{4a^2\tau} =$$

$$= -a^2\tau\left(\mathbf{k} - i\,\frac{\mathbf{R}}{2a^2\tau}\right)^2 - \frac{\mathbf{R}^2}{4a^2\tau}$$

Imamo stoga posla s integralom oblika

$$\int d^3k\, e^{-\alpha(\mathbf{k}-i\mathbf{b})^2} = \{\ell_j = k_j - ib_j\} =$$

$$= \int_{-\infty-ib_x}^{\infty-ib_x} d\ell_x \int_{-\infty-ib_y}^{\infty-ib_y} d\ell_y \int_{-\infty-ib_z}^{\infty-ib_z} d\ell_z\, e^{-\alpha\boldsymbol{\ell}^2} =$$

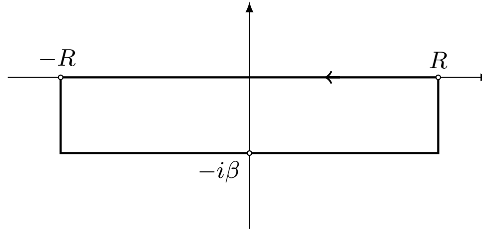
$$= \left(\int_{-\infty - ib_x}^{\infty - ib_x} d\ell_x \, e^{-\alpha \ell_x^2} \right) \left(\int_{-\infty - ib_y}^{\infty - ib_y} d\ell_y \, e^{-\alpha \ell_y^2} \right) \left(\int_{-\infty - ib_z}^{\infty - ib_z} d\ell_z \, e^{-\alpha \ell_z^2} \right)$$

$$I_\beta(\alpha) = \int_{-\infty - i\beta}^{\infty - i\beta} e^{-\alpha p^2} \, \mathrm{d}p$$

gdje su $\alpha > 0$ (jer je $\tau > 0$) i β realne konstante. Pretpostavit ćemo da je $\beta > 0$ jer je analiza u slučaju $\beta < 0$ u potpunosti analogna. Promatramo kompleksan integral

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{-\alpha z^2} \, \mathrm{d}z$$

gdje je $\mathcal{C}$ pravokutna integracijska krivulja,



Podintegralna funkcija nema singulariteta, pa je

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} e^{-\alpha z^2} \, \mathrm{d}z = I_\beta(\alpha) - I_0(\alpha) + I_R + I_{-R}$$

$$I_R = \int_{-\beta}^{0} e^{-\alpha(R+iy)^2} \, i\mathrm{d}y \,, \quad I_{-R} = \int_{0}^{-\beta} e^{-\alpha(-R+iy)^2} \, i\mathrm{d}y$$

Zadnja dva integrala u sumi daju

$$J_R = I_R + I_{-R} = e^{-\alpha R^2} \int_0^{-\beta} \left(e^{i2\alpha Ry} - e^{-i2\alpha Ry} \right) e^{\alpha y^2} \, i\mathrm{d}y =$$

$$= -2e^{-\alpha R^2} \int_0^{-\beta} e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y) \, \mathrm{d}y = \{y \to -y\} =$$

$$= -2e^{-\alpha R^2} \int_0^{\beta} e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y) \, \mathrm{d}y$$

Kako je

$$\left| \int_0^{\beta} e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y) \, \mathrm{d}y \right| \le \int_0^{\beta} \left| e^{\alpha y^2} \sin(2R\alpha y) \right| \mathrm{d}y \le \int_0^{\beta} e^{\alpha y^2} \, \mathrm{d}y = K < \infty \,,$$

u limesu kada $R \to \infty$ imamo

$$\lim_{R\to\infty} |J_R| \le \lim_{R\to\infty} 2e^{-\alpha R^2} K = 0$$

pa je

$$I_\beta(\alpha) = I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha p^2} \, \mathrm{d}p = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

Koristeći ovaj rezultat imamo

$$\int d^3k\, e^{-\alpha(\mathbf{k}-i\mathbf{b})^2} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2}$$

Uvrštavanjem parametra $\alpha = a^2\tau$ dobivamo

$$G(\tau, \mathbf{R}) = \frac{\theta(\tau)}{(4\pi a^2\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{R}^2}{4a^2\tau}\right) \tag{8.16}$$

Nehomogena valna jednadžba. Promotrimo tjeranu valnu jednadžbu

$$L[u](\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)\ , \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\boldsymbol{\nabla}^2$$

$$LG(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')$$

Kako je operator L traslacijski invarijantan, vrijedi

$$G = G(\mathbf{R}, \tau)\ , \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ ,\ \tau = t - t'$$

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \widetilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + \omega\tau)}$$

$$\delta(\mathbf{R})\delta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + \omega\tau)}$$

Uvrštavanjem u PDJ imamo

$$(i\omega)^2\widetilde{G}(\mathbf{k}, \omega) - c^2(i\mathbf{k})^2\widetilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$$\widetilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\, \frac{1}{c^2\mathbf{k}^2 - \omega^2}$$

pa je

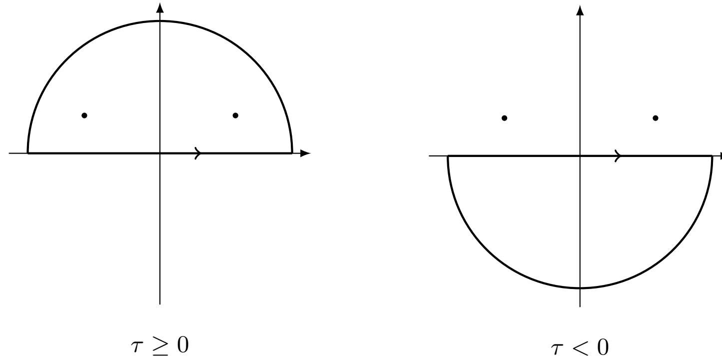
$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + \omega\tau)}}{c^2\mathbf{k}^2 - \omega^2}$$

Prilikom ω-integracije ćemo imati polove na realnoj osi, $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$, pa nam treba dodatni rubni uvjet za pomicanje polova. Na primjer, zahtijevajući kauzalnost

$$G(\mathbf{R}, \tau) = 0\ , \quad \tau < 0$$

Stoga, pomičemo polove *iznad* realne osi, $\pm c|\mathbf{k}| \to \pm c|\mathbf{k}| + i\epsilon$ za neki mali pozitivan $\epsilon > 0$,

$$I(\epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + \omega\tau)}}{c^2\mathbf{k}^2 - (\omega - i\epsilon)^2}$$



$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum \text{Res} = -\left(\frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}+c|\mathbf{k}|\tau)}}{2c|\mathbf{k}|} + \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}-c|\mathbf{k}|\tau)}}{-2c|\mathbf{k}|}\right) = -i\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{c|\mathbf{k}|}\,\sin(c|\mathbf{k}|\tau)$$

$$I(0) = 2\pi i \lim_{\epsilon\to 0}\sum \text{Res} = \frac{2\pi}{c|\mathbf{k}|}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\sin(c|\mathbf{k}|\tau)\theta(\tau)$$

Koristeći oznake $k = |\mathbf{k}|$ i $R = |\mathbf{R}|$ imamo

$$G(\mathbf{R},\tau) = \frac{\theta(\tau)}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta \int_0^{\infty} dk\,k^2\,\frac{e^{ikR\cos\theta}}{ck}\,\sin(ck\tau) =$$

$$= \frac{\theta(\tau)}{c(2\pi)^2}\int_0^{\infty} \mathrm{d}k\,k\sin(ck\tau)\underbrace{\int_{-1}^{1} d\beta\,e^{ikR\beta}}_{2\sin(kR)/kR} = \frac{2\theta(\tau)}{cR(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\,\sin(ck\tau)\sin(kR) =$$

$$= \frac{\theta(\tau)}{cR(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\,\sin(ck\tau)\sin(kR)$$

Koristeći pokrate $x = kR$, $y = ck\tau$ i rastav

$$\sin x\cdot\sin y = -\frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}\right)$$

imamo

$$G(\mathbf{R},\tau) = \frac{1}{cR(2\pi)^2}\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\left(2\delta(R+c\tau) - 2\delta(R-c\tau)\right)\theta(\tau)$$

Zbog θ-funkcije imamo $\tau > 0$, a kako je i $R > 0$, prva δ-funkcija je uvijek nula, pa sređivanjem dobivamo konačan oblik (**retardirane**) Greenove funkcije za valnu PDJ

$$G(\mathbf{R},\tau) = \frac{1}{4\pi cR}\,\delta(R-c\tau) = \frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{\delta(\tau - R/c)}{R} \tag{8.17}$$

Sada možemo dobiti formalan izraz za partikularno rješenje,

$$u_{\mathrm{p}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi c^2}\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\frac{\delta(t_r - t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,f(\mathbf{r}',t')$$

gdje smo upotrijebili **retardirano vrijeme**

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

Dakle,

$$u_{\mathrm{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3r' \, \frac{f(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

9

Specijalne funkcije

Promotrimo separaciju valne i toplinske jednadžbe na prostorni i vremenski dio,

$$u(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})T(t)$$

Kod valne PDJ

$$c^2 T \boldsymbol{\nabla}^2 \psi - \psi \ddot{T} = 0$$

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{c^2}\frac{T_{tt}}{T} = -k^2$$

gdje je $k \geq 0$ separacijska konstanta (suprotni predznak bi dao eksponencijalnu funkciju u vremenskom dijelu rješenja).

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0\,, \quad \ddot{T} + c^2 k^2 T = 0$$

Ovdje je praktično uvesti pokratu $\omega = ck$. Rješenje vremenskog dijela možemo napisati ovisno o vrijednosti separacijske konstante k,

a) $k > 0$

$$T_\omega(t) = A_\omega \cos(\omega t) + B_\omega \sin(\omega t)$$

b) $k = 0$

$$T_0(t) = a_0 t + b_0$$

U ovom slučaju obično fizikalnim zahtijevom omeđenosti rješenja slijedi $a_0 = 0$. Preostalu konstantnu funkciju možemo formalno pridružiti gornjem slučaju.

Kod toplinske jednadžbe

$$a^2 T \boldsymbol{\nabla}^2 \psi - \psi \dot{T} = 0$$

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{a^2}\frac{\dot{T}}{T} = -k^2$$

gdje je $k \geq 0$ separacijska konstanta.

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0\,, \quad \dot{T} + a^2 k^2 T = 0$$

Rješenje vremenskog dijela dano je eksponencijalno trnućom funkcijom

$$T_k(t) = A_k e^{-a^2 k^2 t}$$

U oba slučaja prostorni dio funkcije zadovoljava tzv. **Helmholtzovu jednadžbu**

$$(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2)\psi = 0 \tag{9.1}$$

Njen specijalan slučaj je Laplaceova PDJ, koja se dobije za $k = 0$. U nekim slučajevima se pojavljuje tzv. **modificirana Helmholtzova jednadžba**. Na primjer, prilikom separacije Laplaceove jednadžbe u cilindričnom koordinatnom sustavu, ako je z-dio rješenja oscilatoran, tada se modificirana Helmholtzova jednadžba javlja u $r\phi$-dijelu jednadžbe,

$$(\boldsymbol{\nabla}^2 - k^2)\psi = 0 \tag{9.2}$$

gdje je $\boldsymbol{\nabla}$ ovdje dvodimenzionalna nabla (bez derivacije po koordinati z).

Očigledno, formalno je moguće napraviti prijelaz s rješenja Helmholtzove u rješenja modificirane Helmholtzove jednadžbe zamjenom $k \to ik$. Ovdje ćemo razmotriti daljnju separaciju Helmholtzove jednadžbe u sfernom i cilindričnom koordinatnom sustavu, te funkcije koje se pri tom pojavljuju.

§ 9.1 Separacija u sfernom koordinatnom sustavu

Nastavljamo sa separacijom jednadžbe (9.1), koristeći izraz za Laplasijan u sfernom koordinatnom sustavu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + k^2\psi = 0$$

Sada koristimo rastav funkcije ψ na radijalni i kutni dio,

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$$

Uvrštavanjem u gornju diferencijalnu jednadžbu i množenjem s r^2/RY dobivamo

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2r^2 = -\frac{1}{Y}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right) = \ell(\ell+1)$$

gdje smo separacijsku konstantu zapisali na konvencionalan način, pomoću parametra ℓ (za kojeg će se poslije pokazati da je cijeli broj).

$$(r^2R')' + (k^2r^2 - \ell(\ell+1))R = 0 \tag{9.3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \ell(\ell+1)Y = 0 \tag{9.4}$$

Prvo rješavamo kutnu jednadžbu. Funkciju Y rastavljamo prema

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Uvrštavanjem i množenjem sa $\sin^2\theta/Y$ dobivamo

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \ell(\ell+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = m^2$$

gdje je m separacijska konstanta. Azimutalni dio,

$$\Phi''(\phi) + m^2\Phi(\phi) = 0$$

$$\Phi_m(\phi) = \begin{cases} a_m \exp(im\phi) + b_m \exp(-im\phi)\ , & m \neq 0 \\ a_0\phi + b_0\ , & m = 0 \end{cases}$$

Zahtjev konzistentnosti $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ u slučaju $m \neq 0$ povlači $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, a u slučaju $m = 0$ povlači $a_0 = 0$ (pa preostaje samo konstantna funkcija). Nadalje rješavamo Θ-jednadžbu

$$\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\ell(\ell+1)\sin^2\theta - m^2\right)\Theta = 0$$

upotrebom supstitucije

$$x = \cos\theta\ , \quad \sin\theta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin^2\theta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = (x^2-1)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ , \quad P(x) \equiv \Theta(\theta)$$

$$(1-x^2)\left((1-x^2)P'\right)' + \left(\ell(\ell+1)(1-x^2) - m^2\right)P = 0$$

$$(1-x^2)^2P'' - 2x(1-x^2)P' + \left(\ell(\ell+1)(1-x^2) - m^2\right)P = 0$$

Dijeljenjem s $(1-x^2)$,

$$(1-x^2)P'' - 2xP' + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0 \tag{9.5}$$

Ovo je **pridružena Legendreova jednadžba**, čija su rješenja **pridružene Legendreove funkcije prve vrste** P_ℓ^m i **pridružene Legendreove funkcije druge vrste** Q_ℓ^m. Funkcije $Q_\ell^m(x)$ divergiraju u $x = \pm 1$ (na polovima), pa se pojavljuju u rješenju samo kada su ovi dijelovi prostora isključeni rubnim uvjetima. Ukupni kutni dio rješenja Helmholtzove jednadžbe, regularan na polovima (tj. u točkama $\theta = 0, \pi$) su **kugline funkcije** (ili **sferni harmonici**) $Y_{\ell m}$, definirane s

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \mathcal{N}_{\ell m}P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}\ , \tag{9.6}$$

uz prikladnu normalizaciju $\mathcal{N}_{\ell m}$. Kasnije ćemo izvesti eksplicitan izraz na $\mathcal{N}_{\ell m}$, te pokazati da za regularna rješenja imamo

$$m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell\}\ , \quad \ell \in \mathbb{N}_0$$

Promotrimo sada radijalni dio Helmholtzove jednadžbe.

- Ako je $k \neq 0$ možemo se poslužiti supstitucijom

$$x = kr\ , \quad y(x) \equiv R(x/k)$$

$$x^2y'' + 2xy' + (x^2 - \ell(\ell+1))y = 0$$

$$y(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}\,, \quad y'(x) = v'(x)x^{-1/2} - \frac{1}{2}\,v(x)x^{-3/2}$$

$$y''(x) = v''(x)x^{-1/2} - v'(x)x^{-3/2} + \frac{3}{4}\,v(x)x^{-5/2}$$

$$x^2v'' + xv' + \left(x^2 - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2\right)v = 0$$

Ovo je **Besselova diferencijalna jednadžba**, čija su rješenja **Besselove funkcije** $J_{\pm\ell\pm\frac{1}{2}}(x)$. Prema tome, radijalni dio rješenja je općnito oblika

$$R_{k\ell}(r) = c_{k\ell}\,\frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} + d_{k\ell}\,\frac{J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}$$

Sve skupa, prostorni dio rješenja Helmholtzove jednadžbe u sfernom koordinatnom sustavu, u slučaju kada je $k \neq 0$, općenito je oblika

$$\psi_k(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}Y_{\ell m}(\theta,\phi)\right)R_{k\ell}(r)$$

- Ako je $k = 0$, Helmholtzova jednadžba se svodi na Laplaceova jednadžbu, a radijalni dio ima nešto jednostavniji oblik (Eulerova ODJ),

$$(r^2R')' - \ell(\ell+1)R = 0$$

$$r^2R'' + 2rR' - \ell(\ell+1)R = 0$$

Uvrštavanjem ansatza $R(r) \sim r^\lambda$ dobivamo

$$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - \ell(\ell+1) = 0$$

$$\lambda(\lambda+1) - \ell(\ell+1) = 0$$

pa je $\lambda = \ell$ ili $-\ell - 1$. Rješenje je stoga oblika

$$R_\ell(r) = c_\ell r^\ell + d_\ell r^{-(\ell+1)}$$

Konačno, prostorni dio rješenja Laplaceove jednadžbe sfernom koordinatnom sustavu općenito je oblika

$$\psi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(a_{\ell m}r^\ell + b_{\ell m}r^{-(\ell+1)}\right)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

§ 9.2 Separacija u cilindričnom koordinatnom sustavu

Nastavljamo sa separacijom jednadžbe (9.1), koristeći izraz za Laplasijan u cilindričnom koordinatnom sustavu

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

Sada koristimo rastav funkcije ψ,

$$\psi(s,\phi,z) = R(s)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$\frac{(sR')'}{sR} + \frac{\Phi''}{s^2\Phi} + k^2 = -\frac{Z''}{Z} = p^2$$

za neki $p \in \mathbb{C}$

$$Z''(z) + p^2 Z(z) = 0$$

$$Z_p(z) = \begin{cases} a_p \exp(ipz) + b_p \exp(-ipz)\ , & p \neq 0 \\ a_0 z + b_0\ , & p = 0 \end{cases}$$

Na primjer, u slučaju translacijske invarijantnosti u smjeru z-osi, imamo $p = 0 = a_0$ slučaj. S druge strane, ako imamo cilindar s Dirichletovim rubnim uvjetima zadanima na ravninama $z = z_0$ i $z = z_0 + L$, tada je $p \in \pi\mathbb{Z}/L$.

$$\frac{(sR')'}{sR} + \frac{\Phi''}{s^2\Phi} + k^2 - p^2 = 0$$

$$\frac{s}{R}\,(sR')' + (k^2 - p^2)s^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2$$

$$\Phi''(\phi) + m^2\Phi(\phi) = 0$$

$$\Phi_m(\phi) = \begin{cases} c_m \exp(im\phi) + d_m \exp(-im\phi)\ , & m \neq 0 \\ c_0\phi + d_0\ , & m = 0 \end{cases}$$

Zahtjev konzistentnosti $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ u slučaju $m \neq 0$ povlači $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, a u slučaju $m = 0$ povlači $c_0 = 0$ (pa preostaje samo konstantna funkcija). Dakle, imamo (nakon preimenovanja konstanti)

$$\Phi_m(\phi) = e^{im\phi}\ , \quad m \in \mathbb{Z}$$

Radijalna jednadžba,

$$s^2 R''(s) + sR'(s) + \big((k^2 - p^2)s^2 - m^2\big)R(s) = 0$$

- ⋆ u slučaju kada je $k^2 > p^2$ ovo je **obična Besselova jednadžba**
- ⋆ u slučaju kada je $k^2 < p^2$ ovo je **modificirana Besselova jednadžba**
- ⋆ u slučaju kada je $k^2 = p^2$ ovo je **Eulerova diferencijalna jednadžba**,

$$s^2 R''(s) + sR'(s) - m^2 R(s) = 0$$

Razlikujemo dva slučaja,

a) $m \neq 0$. Uvrštavanjem ansatza $R(s) \sim s^\lambda$ dobivamo

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - m^2 = 0$$

pa je $\lambda = \pm m$, odnosno, rješenja su funkcije s^m i s^{-m}.

b) $m = 0$. Jednadžbu je u ovom slučaju moguće napisati u obliku

$$(sR')' = 0$$

pa su rješenja $\ln(s)$ i konstantna funkcija.

§ 9.3 Legendreovi polinomi i kugline funkcije

Prvo promatramo $m = 0$ slučaj pridružene Legendreove jednadžbe, nakon čega prelazimo na općeniti slučaj.

Legendreova diferencijalna jednadžba (za $m = 0$).

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \ell(\ell + 1)y(x) = 0$$

Potražimo rješenja pomoću Frobeniusove metode,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} , \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \lambda) x^{n+\lambda-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \lambda)(n + \lambda - 1) x^{n+\lambda-2}$$

$$a_n(n + \lambda)(n + \lambda - 1)x^{n+\lambda-2} - a_n\big((n + \lambda)(n + \lambda - 1)+$$

$$+2(n + \lambda) - \ell(\ell + 1)\big)x^{n+\lambda} = 0$$

$$n = 0 \ : \ a_0\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$n = 1 \ : \ a_1(\lambda + 1)\lambda = 0$$

Ako je $\lambda = 0$, tada imamo dvije slobodne konstante a_0 i a_1, a ako je $\lambda = 1$, tada je $a_1 = 0$. Rekurzija,

$$a_{n+2} = \frac{(n + \lambda)(n + \lambda + 1) - \ell(\ell + 1)}{(n + \lambda + 1)(n + \lambda + 2)} \, a_n$$

Imamo dva linearno nezavisna rješenja, sumu po parnim i sumu po neparnim članovima. Promotrimo konvergentnost dobivenih redova. Testom omjerom

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}x^{n+\lambda+2}}{a_n x^{n+\lambda}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n + \lambda)(n + \lambda + 1) - \ell(\ell + 1)}{(n + \lambda + 1)(n + \lambda + 2)} \right| x^2 = x^2$$

Dakle, oba reda konvergiraju za $|x| < 1$. U slučaju kada je $|x| = 1$, moramo se poslužiti nekim drugim testom (npr. Gaussov test, vidi Arfken/Weber str.333.). U ovim točkama dobiveni redovi divergiraju, osim ako nekim pažljivim izborom konstante ℓ ne "odrežemo" red na nekom konačnom članu. Konkretno, odaberemo li $\ell \in \mathbb{N}_0$, tada će, ovisno o parnosti broja ℓ jedno rješenje biti konačan polinom, a drugo i dalje divergentno u $x = \pm 1$. Konkretno, dobivena dva rješenja su **Legendreovi polinomi** P_ℓ i **Legendreove funkcije druge vrste** Q_ℓ. Promotrimo nekoliko konkretnih najjednostavnijih primjera,

$$\lambda = 1\,, \quad a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - \ell(\ell+1)}{(n+2)(n+3)}\, a_n = -\frac{(\ell-n-1)(\ell+n+2)}{(n+2)(n+3)}\, a_n$$

$$\lambda = 0\,, \quad a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n = -\frac{(\ell-n)(\ell+n+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n$$

Imamo redom,

$\ell = 0$

$$y_1(x) = a_0 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \right) = \frac{a_0}{2}\, \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) \equiv a_0 Q_0(x)$$

$$y_2(x) = a_0 x^0 + a_1 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \right) = a_0 + a_1\, \frac{1}{2}\, \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) \equiv$$
$$\equiv a_0 P_0(x) + a_1 Q_0(x)$$

$\ell = 1$

$$y_1(x) = a_0 x = a_0 P_1(x)$$

$$y_2(x) = a_0 \left(1 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \ldots \right) + a_1 x = a_0 \left(1 - \frac{x}{2}\, \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right) + a_1 x \equiv$$
$$\equiv -a_0 Q_1(x) + a_1 P_1(x)$$

i tako dalje ... Funkcije koje se pritom pojavljuju u rješenjima su

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1)\,, \quad \ldots$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\, \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right)\,, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2}\, \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1\,, \quad \ldots$$

Primjetimo kako su Legendreove funkcije druge vrste Q_ℓ divergentne u $x = \pm 1$. Dakle, za svaki $\ell \in \mathbb{N}_0$ imamo općenito rješenje Legendreove jednadžbe oblika

$$y(x) = a\, P_\ell(x) + b\, Q_\ell(x)$$

Teorem 9.1. **(Rodriguesova formula)**

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\, \frac{\partial^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\, (x^2 - 1)^\ell \tag{9.7}$$

DOKAZ : Promotrimo rekurziju od najvišeg prema nižim članovima u $\lambda = 0$ slučaju,

$$a_n = -\frac{(n+1)(n+2)}{(\ell-n)(\ell+n+1)}\, a_{n+2}$$

$$P_\ell(x) = \frac{(2\ell-1)!!}{\ell!}\left(x^\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2(2\ell-1)}\, x^{\ell-2} + \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)}{2\cdot 4\cdot (2\ell-1)(2\ell-3)}\, x^{\ell-4} - \dots\right)$$

gdje je faktor prije zagrade konvencionalna normalizacija. Koristeći općenite relacije za $N \in \mathbb{N}_0$,

$$(2N)!! = 2^N N!\,, \quad (2N-1)!! = \frac{(2N)!}{(2N)!!} = \frac{(2N)!}{2^N N!}$$

koeficijent uz član $x^{\ell-2k}$ glasi

$$\frac{(2\ell-1)!!}{\ell!}\,(-1)^k\,\frac{\ell!}{(\ell-2k)!}\,\frac{1}{(2k)!!}\,\frac{(2\ell-2k-1)!!}{(2\ell-1)!!} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(\ell-2k)!}\,\frac{1}{2^k k!}\,\frac{(2\ell-2k)!}{2^{\ell-k}(\ell-k)!} = \frac{(-1)^k(2\ell-2k)!}{2^\ell k!(\ell-2k)!(\ell-k)!}$$

Dakle,

$$P_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \ell/2\rfloor}(-1)^k\,\frac{(2\ell-2k)!}{2^\ell k!(\ell-2k)!(\ell-k)!}\,x^{\ell-2k}$$

Nadalje,

$$(x^2-1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\,\frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\,x^{2\ell-2k}$$

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\,x^N = N(N-1)\cdots(N-m+1)x^{N-m} = \frac{N!}{(N-m)!}\,x^{N-m}$$

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,x^{2\ell-2k} = \frac{(2\ell-2k)!}{(\ell-2k)!}\,x^{\ell-2k} \quad \text{ili} \quad 0 \quad \text{za} \quad \ell < 2k \le 2\ell$$

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell = \sum_{k=0}^{\lfloor \ell/2\rfloor}(-1)^k\,\frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\,\frac{(2\ell-2k)!}{(\ell-2k)!}\,x^{\ell-2k} = \ell!\,2^\ell P_\ell(x)$$

□

Prvih nekoliko:

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2-1)\,, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3-3x)$$

Valja uočiti kako iz oblika rekurzije odmah slijedi da su P_ℓ (ne)parni polinomi ovisno o tome da li je ℓ (ne)paran broj,

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$$

Pomoću Rodriguesove formule možemo pronaći vrijednost Legendreovih polinoma u $x = 1$, koja će nam kasnije biti od koristi. Napišemo li Rodriguesovu formulu u obliku

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\,\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left((x+1)^\ell(x-1)^\ell\right)\,,$$

vidimo da u $x = 1$ iščezavaju svi članovi koji nakon deriviranja i dalje sadrže faktor $(x-1)$. Prema tome, "preživljava" samo član u kojem je faktor $(x-1)^\ell$ deriviran svih ℓ puta,

$$P_\ell(1) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\,(1+1)^\ell\,\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x-1)^\ell\Big|_{x=1} = \frac{1}{2^\ell \ell!}\,2^\ell \ell! = 1$$

za svaki ℓ. Nadalje, koristeći parnost Legendreovih polinoma, imamo $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$, te $P_{2n+1}(0) = 0$ (što vrijedi za sve neparne funkcije).

Teorem 9.2. *Funkcija izvodnica*

$$g(r,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-2rt+r^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell P_\ell(t)\,, \quad r<1 \tag{9.8}$$

Dokaz : Promotrimo primjer točkastog naboja u $\mathbf{r}'$, s koordinatnim sustavom orijentiranim tako da je naboj na pozitivnom dijelu z-osi. Ranije smo već pokazali da je

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 0$$

za sve $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$. Također,

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta$$

Koristeći općenito rješenje Laplaceove PDJ u osnosimetričnom slučaju,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

Promotrimo slučaj kada je i $\mathbf{r}$ na pozitivnom dijelu z-osi, te $r<r'$,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r'-r} = \frac{1}{r'}\,\frac{1}{1-(r/r')} = \frac{1}{r'}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^\ell$$

Usporedbom imamo $B_\ell = 0$ i $A_\ell = r'^{-(\ell+1)}$. Dakle,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{r'^{\ell+1}}\,P_\ell(\cos\theta)$$

Upotrijebimo li oznaku $t=\cos\theta$ i uvrstimo $r'=1$ dobivamo traženu tvrdnju. □

Teorem 9.3. *Vrijede rekurzije*

$$P_{\ell+1}(x) = \frac{2\ell+1}{\ell+1}\,xP_\ell(x) - \frac{\ell}{\ell+1}\,P_{\ell-1}(x) \tag{9.9}$$

$$Q_{\ell+1}(x) = \frac{2\ell+1}{\ell+1}\,xQ_\ell(x) - \frac{\ell}{\ell+1}\,Q_{\ell-1}(x) \tag{9.10}$$

Dokaz :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{2}\,(1+r^2-2rt)^{-3/2}\,2(r-t) = \frac{t-r}{(1+r^2-2rt)^{3/2}}$$

Množenjem s $(1+r^2-2rt)$ imamo relaciju

$$(1+r^2-2rt)\,\frac{\partial g}{\partial r} = (t-r)g$$

Uvrštavanjem razvoja po Legendreovim polinomima,

$$(1+r^2-2rt)\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(t)\ell r^{\ell-1} = (t-r)\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(t) r^\ell$$

Član uz r^0 nam daje $P_1(t) = tP_0(t) = t$. Član uz r^ℓ nam daje

$$(\ell+1)P_{\ell+1} + (\ell-1)P_{\ell-1} - 2t\ell P_\ell = tP_\ell - P_{\ell-1}$$

odakle slijedi tražena relacija. □

Pomoću rekurzijske relacije možemo pronaći vrijednost parnih Legendreovih polinoma u $x=0$,

$$P_{2\ell}(0) = \frac{4\ell-1}{2\ell}\cdot 0\cdot P_{2\ell-1}(0) - \frac{2\ell-1}{2\ell}P_{2\ell-2}(0) =$$

$$= (-1)^\ell\,\frac{(2\ell-1)!!}{(2\ell)!!}\,P_0(0) = (-1)^\ell\,\frac{(2\ell-1)!!}{(2\ell)!!}$$

Postoji i niz drugih rekurzijskih relacija, poput

$$P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) = (2\ell+1)P_\ell(x)$$

Teorem 9.4. (**Ortogonalnost i normalizacija Legendreovih polinoma**)

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell m} \tag{9.11}$$

Dokaz : ODJ za Legendreove polinome P_ℓ i P_m možemo napisati u obliku

$$\big((1-x^2)P'_\ell\big)' + \ell(\ell+1)P_\ell = 0$$

$$\big((1-x^2)P'_m\big)' + m(m+1)P_m = 0$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s P_m, a drugu s P_ℓ, te ih oduzmemo i integriramo u intervalu od -1 do 1, dobivamo

$$\int_{-1}^{1}\Big(P_m\big((1-x^2)P'_\ell\big)' - P_\ell\big((1-x^2)P'_m\big)'\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\big(\ell(\ell+1)-m(m+1)\big)P_\ell P_m\,\mathrm{d}x = 0$$

Valja uočiti kako prvi član iščezava,

$$\int_{-1}^{1}\Big(P_m\big((1-x^2)P'_\ell\big)' - P_\ell\big((1-x^2)P'_m\big)'\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\Big((1-x^2)\big(P'_\ell P_m - P_\ell P'_m\big)\Big)'\mathrm{d}x =$$

$$= (1-x^2)\big(P'_\ell P_m - P_\ell P'_m\big)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Odavde slijedi da je

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

za sve $\ell \neq m$. Sada ćemo promotriti integral

$$I_\ell = \int_{-1}^{1} P_\ell^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Koristeći Rodriguesovu formulu imamo

$$I_\ell = \frac{1}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell \cdot \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell \cdot \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^{\ell-1}}{\mathrm{d}x^{\ell-1}}\,(x^2-1)^\ell \cdot \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell\Big|_{-1}^{1} -$$
$$- \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{\ell-1}}{\mathrm{d}x^{\ell-1}}\,(x^2-1)^\ell \cdot \frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}x^{\ell+1}}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x$$

Kako je

$$\frac{\mathrm{d}^{\ell-1}}{\mathrm{d}x^{\ell-1}}\,(x^2-1)^\ell = \frac{\mathrm{d}^{\ell-1}}{\mathrm{d}x^{\ell-1}}\,\big((x+1)^\ell(x-1)^\ell\big) = (x+1)(x-1)\cdot\ldots$$

slijedi da prvi član u gornjem izrazu iščezava u granicama $x = \pm 1$. Ponavljanjem parcijalne integracije ℓ puta dobivamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell \cdot \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x = (-1)^\ell \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell\, \frac{\mathrm{d}^{2\ell}}{\mathrm{d}x^{2\ell}}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x$$

Nadalje, kako je

$$\frac{\mathrm{d}^{2\ell}}{\mathrm{d}x^{2\ell}}\,(x^2-1)^\ell = (2\ell)!$$

imamo

$$I_\ell = \frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x$$

Koristeći parcijalnu integraciju imamo

$$J_\ell \equiv \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x = \Big\{u = (x^2-1)^\ell,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x\Big\} = -\int_{-1}^{1} \ell(x^2-1)^{\ell-1} 2x \,\cdot\, x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -2\ell \int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{\ell-1}\,\mathrm{d}x = -2\ell(J_\ell + J_{\ell-1})$$

odakle slijedi rekurzija

$$J_\ell = -\frac{2\ell}{2\ell+1}\,J_{\ell-1}$$

Kako je $J_0 = 2$, slijedi

$$J_\ell = (-1)^\ell\,\frac{\ell!\,2^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$$

Ovo nam konačno daje

$$I_\ell = \frac{2(2\ell)!}{2^\ell\,\ell!\,(2\ell+1)!!} = \frac{2(2\ell)!}{(2\ell)!!(2\ell-1)!!(2\ell+1)} = \frac{2}{2\ell+1}$$

□

Razvoj funkcija po Legendreovim polinomima. Svaku (neprekidnu?) funkciju $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ možemo razviti

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x) \tag{9.12}$$

Množenjem gornjeg izraza s P'_ℓ, integriranjem preko integrvala $[-1, 1]$, te korištenjem ortogonalnosti Legendreovih polinoma, imamo

$$A_\ell = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^{1} P_\ell(x) f(x) \, \mathrm{d}x \tag{9.13}$$

Pridružene Legendreove funkcije.

Lema 9.5. **(Leibniz)**

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \tag{9.14}$$

DOKAZ : Dokaz ide pomoću indukcije. U slučaju $n = 1$ imamo poznatu relaciju

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Pretpostavimo da formula vrijedi za neki $n \geq 1$, te promotrimo $n + 1$ slučaj,

$$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(f^{(n+1-k)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)} \Big)$$

Drugi član možemo napisati u malo drugačijem obliku pomoću zamjene indeksa $r = k + 1$, te preimenovanjem indeksa $r \to k$ (slijepi indeksi!)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} = \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r-1} f^{(n+1-r)} g^{(r)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

Uvrštavanjem u gornji izraz, te izdvajanjem $k = 0$ člana iz prve sume i $k = n + 1$ iz druge sume, imamo

$$(fg)^{(n+1)} = \binom{n}{0} f^{(n+1)} g + \binom{n}{n} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

Uočimo da je

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

Prema tome, vraćanjem dva izdvojena član natrag u sumu, imamo konačno

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} \,,$$

čime je dokaza tvrdnja. □

Promotrimo što dobijemo ako Legendreovu jednadžbu deriviramo m puta. Koristeći Leibnizovu formulu imamo

$$\big((1-x^2)P_\ell''\big)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (1-x^2)^{(k)} P_\ell^{(m-k+2)} =$$

$$= (1-x^2)P_\ell^{(m+2)} + m(-2x)P_\ell^{(m+1)} + \frac{m(m-1)}{2}(-2)P_\ell^{(m)}$$

$$(xP_\ell')^{(m)} = xP_\ell^{(m+1)} + mP_\ell^{(m)}$$

Korištenjem ovih rezultata, te oznake $u = P_\ell^{(m)}$, m puta derivirana Legendreova jednadžba glasi

$$(1-x^2)u'' - 2mxu' - m(m-1)u - 2xu' - 2mu + \ell(\ell+1)u = 0$$

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + \big(\ell(\ell+1) - m(m+1)\big)u = 0$$

Sada ćemo upotrijebiti novu funkciju

$$v \equiv (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u$$

$$u' = \left(v' + \frac{mxv}{1-x^2}\right)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$u'' = \left(v'' + \frac{mv}{1-x^2} + \frac{2mxv'}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2v}{(1-x^2)^2}\right)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left(m - \frac{m^2x^2}{1-x^2} + \big(\ell(\ell+1) - m(m+1)\big)\right)v = 0$$

odnosno

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)v = 0$$

Vidimo da je funkcija v rješenje pridružene Legendreove jednadžbe, odakle zaključujemo

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_\ell(x)\,, \quad Q_\ell^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} Q_\ell(x) \tag{9.15}$$

Također,

$$P_\ell^0(x) = P_\ell(x)\,, \quad Q_\ell^0(x) = Q_\ell(x)\,, \quad P_\ell^m(x) = 0 \quad \text{za} \quad m > \ell$$

Iz dobivenih izraza izgleda kao da P_ℓ^m ima smisla samo za $m \geq 0$. Međutim, upotrijebimo li Rodriguesovu formulu,

$$P_\ell^m(x) = \frac{1}{2^\ell\,\ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \tag{9.16}$$

vidimo da za svaki m, takav da je $|m| \leq \ell$, imamo dobro definiranu netrivijalnu pridruženu Legendreovu funkciju P_ℓ^m. Nadalje, valja uočiti kako je prodružena Legendreova jednadžba invarijantna na zamjenu $m \to -m$. Prema tome, funkcije P_ℓ^m i P_ℓ^{-m} su proporcionalne. Koristeći gornji izraz moguće je dokazati narednu relaciju

Teorem 9.6.

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \, \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \, P_\ell^m(x) \tag{9.17}$$

DOKAZ : Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $m \geq 0$. Tada vrijedi

$$P_\ell^m(x) = \frac{1}{2^\ell \, \ell!} \, (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{r=0}^{\ell+m} \binom{\ell+m}{r} \frac{d^r}{\mathrm{d}x^r} \, (x+1)^\ell \, \frac{d^{\ell+m-r}}{\mathrm{d}x^{\ell+m-r}} \, (x-1)^\ell$$

U ovoj sumi "preživljavaju" samo članovi za koje je $r \leq \ell$ i $\ell + m - r \leq \ell$, odnosno $m \leq r$. Dakle,

$$P_\ell^m(x) = \frac{1}{2^\ell \, \ell!} \, (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{r=m}^{\ell} \binom{\ell+m}{r} \frac{\ell!}{(\ell-r)!} \, (x+1)^{\ell-r} \, \frac{\ell!}{(r-m)!} \, (x-1)^{r-m}$$

S druge strane

$$P_\ell^{-m}(x) = \frac{1}{2^\ell \, \ell!} \, (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \sum_{s=0}^{\ell-m} \binom{\ell-m}{s} \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s} \, (x+1)^\ell \, \frac{\mathrm{d}^{\ell-m-s}}{\mathrm{d}x^{\ell-m-s}} \, (x-1)^\ell =$$

$$= \frac{1}{2^\ell \, \ell!} \, (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \sum_{s=0}^{\ell-m} \binom{\ell-m}{s} \frac{\ell!}{(\ell-s)!} \, (x+1)^{\ell-s} \, \frac{\ell!}{(s+m)!} \, (x-1)^{s+m}$$

Koristeći zamjenu $r = s + m$ imamo

$$P_\ell^{-m}(x) = \frac{1}{2^\ell} \, (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \sum_{r=m}^{\ell} \binom{\ell-m}{r-m} \frac{\ell!}{(\ell+m-r)!r!} \, (x+1)^{\ell+m-r} (x-1)^r$$

Nadalje, koristeći rastav

$$(x-1)^r = (x-1)^{r-m} (-1)^m (1-x)^m \; ,$$

izlučivanjem faktora $(1-x^2)^m$ imamo konačno

$$P_\ell^{-m}(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell} \, (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{r=m}^{\ell} \binom{\ell-m}{r-m} \frac{\ell!}{(\ell+m-r)!r!} \, (x+1)^{\ell-r} (x-1)^{r-m}$$

Usporedbom dva dobivena izraza za P_ℓ^m i $P_\ell^{-m}(x)$ slijedi tvrdnja. □

U dijelu literature se koristi konvencija

$$P_\ell^{-m}(x) = P_\ell^m(x) \quad \text{ili} \quad P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \, P_\ell^m(x)$$

Faktori koji su se pojavili u relaciji (9.17) su upotrebljeni radi konzistentnosti s Rodriguesovom formulom.

Nadalje, odmah vidimo parnost (faktor dolazi od zamjene $x \to -x$ u derivaciji)

$$P_\ell^m(-x) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(x)$$

kao i vrijednost u $x = \pm 1$ za $m \neq 0$,

$$P_\ell^m(\pm 1) = 0 \quad \text{za} \quad m \neq 0$$

Rekurzije

$$P_{\ell+1}^m(x) = \frac{2\ell+1}{\ell-m+1}\, xP_\ell^m(x) - \frac{\ell+m}{\ell-m+1}\, P_{\ell-1}^m(x)$$

Komentar: Kako se vidi divergiranje Frobeniusovog reda za pridruženu Legendreovu jednadžbu kada je $|m| > \ell$?

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0$$

$$y = (1-x^2)^{m/2} u$$

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + \kappa u = 0\ , \quad \kappa = \ell(\ell+1) - m(m+1)$$

$$a_0 \lambda(\lambda-1) = 0$$

$$a_1 \lambda(\lambda+1) = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{(n+\lambda)(n+\lambda+2m+1) - \kappa}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}\, a_n$$

Za $\lambda = 1$ imamo

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2m+2) - \kappa}{(n+2)(n+3)}\, a_n\ , \quad a_1 = 0$$

dok za $\lambda = 0$ imamo

$$a_{n+2} = \frac{n(n+2m+1) - \kappa}{(n+1)(n+2)}\, a_n$$

Valja uočiti da se brojnici mogu faktorizirati na sljedeći način

$$(n+1)(n+2m+2) - \kappa = (n+m+\ell+2)(n+m-\ell+1)$$

$$n(n+2m+1) - \kappa = (n+m+\ell+1)(n+m-\ell)$$

Stoga, ako je $m - \ell > 0$ neće biti "rezanja" reda. Promotrimo detalje konvergentnosti ovih redova pomoću Gaussovog testa. Promatramo redove $\sum b_n$ i $\sum c_n$, gdje su $b_n = a_{2n}$ (pojavljuju se i u $\lambda = 1$ i u $\lambda = 0$ slučaju) i $c_n = a_{2n+1}$ (pojavljuju se u $\lambda = 0$ slučaju). Upotrebom Gaussovog testa ćemo se susresti s izrazima oblika

$$\frac{n^2 + \alpha n + \beta}{n^2 + \gamma n + \delta} = 1 + \frac{(\alpha-\gamma)n + (\beta-\delta)}{n^2 + \gamma n + \delta} = 1 + \frac{\alpha-\gamma}{n} + \frac{B(n)}{n^2}$$

gdje je

$$\lim_{n\to\infty} B(n) = \beta - \delta + \gamma(\gamma - \alpha) < \infty$$

Konvergentnost vrijedi pod uvjetom $\alpha - \gamma > 1$. Direktnim uvrštavanjem se provjeri kako u svim slučajevima vrijedi $\alpha - \gamma = 1 - m$. Dakle, konvergentnost imamo samo kada je $m < 0$. Međutim, u takvom slučaju sva rješenja $y = u/(1-x^2)^{|m|/2}$ divergiraju u $x = \pm 1$. Zaključak: odabiremo samo $m \le \ell$, tako da su funkcije u polinomi. Što je s negativnim vrijednostima parametra m, kako vidimo da je $m \ge -\ell$? "Na prste", jednadžba je simetrična na zamjenu $m \to -m$.

Teorem 9.7. *Ortogonalnost i normalizacija pridruženih Legendreovih funkcija*

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_r^m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,\delta_{\ell r} \tag{9.18}$$

DOKAZ :

$$I_{\ell m} = \int_{-1}^{1} \big(P_\ell^m(x)\big)^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\,\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x$$

Sada primjenjujemo parcijalnu integraciju,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\,\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^{\ell+m-1}}{\mathrm{d}x^{\ell+m-1}}\,(x^2-1)^\ell \cdot \left((1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\right)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m-1}}{\mathrm{d}x^{\ell+m-1}}\,(x^2-1)^\ell\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\right)\mathrm{d}x$$

Rubni članovi iščezavaju u $x = \pm 1$. Ponavljanjem postupka parcijalne integracije dobivamo rubne članove oblika

$$\frac{\mathrm{d}^{\ell+m-p}}{\mathrm{d}x^{\ell+m-p}}\,(x^2-1)^\ell \cdot \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}x^{p-1}}\left((1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\right)\Big|_{-1}^{1}$$

Za $p \le m$ iščezava drugi član, a za $p > m$ prvi član (važno je usporediti red polinoma i red derivacije). Na kraju dobivamo izraz

$$I_{\ell m} = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell\,\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\left((1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\right)\mathrm{d}x$$

Koristeći Leibnizovu formulu imamo

$$\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\left((1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\,(x^2-1)^\ell\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\ell+m} \binom{\ell+m}{r} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\,(1-x^2)^m\,\frac{\mathrm{d}^{2\ell+2m-r}}{\mathrm{d}x^{2\ell+2m-r}}\,(x^2-1)^\ell$$

U ovoj sumi "preživljavaju" samo članovi za koje je $r \le 2m$ i $2\ell + 2m - r \le 2\ell$, odnosno samo jedan član $r = 2m$. Dakle,

$$I_{\ell m} = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\,\frac{(\ell+m)!}{(2m)!(\ell-m)!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell\,\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}\,(1-x^2)^m\,\frac{\mathrm{d}^{2\ell}}{\mathrm{d}x^{2\ell}}\,(x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x$$

Koristeći ranije izvedene rezultate

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,x^n = n!\,, \qquad \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell\,\mathrm{d}x = (-1)^\ell\,\frac{\ell!\,2^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$$

uvrštavanjem dobivamo

$$I_{\ell m} = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\,\frac{(\ell+m)!}{(2m)!(\ell-m)!}\,(-1)^\ell\,\frac{\ell!\,2^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}\,(-1)^m(2m)!(2\ell)! =$$

$$= \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,\frac{(2\ell)!}{(2\ell)!!(2\ell-1)!!} = \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$$

□

Da li je gornji izraz konzistentan na zamjenu $m \to -m$? Da, jer

$$\int_{-1}^{1} \big(P_\ell^{-m}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \left(\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right)^2 \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} = \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} =$$

$$= \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+(-m))!}{(\ell-(-m))!}$$

Normalizacija kuglinih funkcija.

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \mathcal{N}_{\ell m} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{9.19}$$

Zahtijevamo

$$\int Y_{\ell m}^* Y_{\ell' m'}\, d\Omega = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{9.20}$$

odnosno, detaljnije

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, Y_{\ell m}^*(\theta,\phi) Y_{\ell' m'}(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{9.21}$$

Kako je

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\phi}\, d\phi = 2\pi\,\delta_{mm'}\ ,$$

koristeći (9.18) imamo

$$2\pi\,\frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,(\mathcal{N}_{\ell m})^2 = 1$$

odnosno

$$\mathcal{N}_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \tag{9.22}$$

Ovaj izraz je definiran za sve cijele brojeve $|m| \le \ell$. Usput,

$$Y_{\ell,-m} = \mathcal{N}_{\ell,-m} P_\ell^{-m} e^{-im\phi} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\,(-1)^m\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\,P_\ell^m\,e^{-im\phi} =$$

$$= (-1)^m \mathcal{N}_{\ell m} P_\ell^m\, e^{-im\phi} = (-1)^m Y_{\ell m}^*$$

Ponekad se koristi realan zapis kuglinih funkcija,

$$Y_{\ell 0} = \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell 0} P_\ell^0(\cos\theta)$$

te za $m \neq 0$,

$$Y_{\ell m}^{(+)}(\theta,\phi) = \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell m}\, P_\ell^m(\cos\theta)\cos(m\phi)$$

$$Y_{\ell m}^{(-)}(\theta, \phi) = \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell m}\, P_\ell^m(\cos\theta)\sin(m\phi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

Kako je

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\phi)\cos(m'\phi)\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin(m\phi)\sin(m'\phi)\, d\phi = \pi\delta_{mm'}$$

normalizacija se razlikuje u odnosu na kompleksan zapis kuglinih funkcija,

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{\ell 0} = \mathcal{N}_{\ell 0}\ , \quad \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell m} = \sqrt{2}\,\mathcal{N}_{\ell m} \quad \text{za} \quad m \neq 0$$

Razvoj funkcije $f : S^2 \to \mathbb{C}$ po kuglinim funkcijama.

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{9.23}$$

$$a_{\ell m} = \int f\, Y_{\ell m}^*\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, f(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \tag{9.24}$$

U slučaju kada imamo razvoj funkcije po kuglinim funkcijama u realnom zapisu,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell 0} Y_{\ell 0}(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}^{(+)} Y_{\ell m}^{(+)}(\theta, \phi) + a_{\ell m}^{(-)} Y_{\ell m}^{(-)}(\theta, \phi) \right)$$

$$a_{\ell 0} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, f(\theta, \phi) Y_{\ell 0}(\theta, \phi)$$

$$a_{\ell m}^{(\pm)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, f(\theta, \phi) Y_{\ell m}^{(\pm)}(\theta, \phi)$$

Primjer: zadana je funkcija

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} +1 & , \quad 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -1 & , \quad \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

Zbog aksijalne simetrije $A_{\ell m} = 0$ za svaki $m \neq 0$. Nadalje

$$A_{\ell 0} = N_{\ell 0} 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \sin\theta\, P_\ell(\cos\theta) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, P_\ell(\cos\theta) \right) =$$

$$= N_{\ell 0} 2\pi \left(\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_\ell(x) + \int_0^1 \mathrm{d}x\, P_\ell(x) \right) = 4\pi N_{\ell 0} \int_0^1 \mathrm{d}x\, P_\ell(x)$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_\ell(x) = \frac{1}{2\ell+1} \int_0^1 \mathrm{d}x\, \left(P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) \right) = \left. \frac{P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x)}{2\ell+1} \right|_0^1 =$$

$$= \frac{P_{\ell-1}(0) - P_{\ell+1}(0)}{2\ell+1}$$

Ovaj izraz je nula za paran ℓ; za neparan $\ell = 2n-1$ imamo

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_\ell(x) = \frac{1}{4n-1}\left((-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} - (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(1+\frac{2n-1}{2n}\right) = (-1)^{n+1}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

stoga

$$A_{2n-1,0} = 4\pi\sqrt{\frac{4n-1}{4\pi}}\,(-1)^{n+1}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

$$A_{2n-1,0} = (-1)^{n+1}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\sqrt{4\pi(4n-1)}$$

Drugim riječima,

$$f(\theta,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(4n-1)\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,P_{2n-1}(\cos\theta)$$

§ 9.4 Besselove i Neumannove funkcije

Kod radijalnog dijela Helmholtzove jednadžbe u sfernom i cilindričnom koordinatnom sustavu susreli smo tzv. **Besselovu jednadžbu**,

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\mu^2)y = 0 \tag{9.25}$$

gdje je $\mu \in \mathbb{R}$ neki realan parametar. Kako je jednadžba invarijantna na zamjenu $\mu \to -\mu$, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti $\mu \geq 0$. Primjenom Frobeniusove metode,

$$\big((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) - \mu^2\big)a_n x^{n+\lambda} + a_n x^{n+\lambda+2} = 0$$

$$\big((n+\lambda)^2 - \mu^2\big)a_n x^{n+\lambda} + a_n x^{n+\lambda+2} = 0$$

Indicijalna jednadžba (uz x^λ)

$$(\lambda^2-\mu^2)a_0 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\mu$$

Jednadžba uz $x^{\lambda+1}$

$$\big((\lambda+1)^2-\mu^2\big)a_1 = 0$$

Uvrštavanjem $\lambda = \pm\mu$ dobivamo

$$\big((\pm\mu+1)^2-\mu^2\big)a_1 = 0$$

$$\big(1 \pm 2\mu\big) a_1 = 0$$

Konačno, opća rekurzija glasi

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm 2\mu)} \tag{9.26}$$

Promotrimo sada različite slučajeve, imajući na umu da je $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\mu$.

a) $2\mu \notin \mathbb{N}_0$. U ovom slučaju je $a_1 = 0$ (a stoga i $a_{2n+1} = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$), te oba rješenja dobivamo direktnim uvrštavanjem korjena indicijalne jednadžbe.

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!!\, 2^n (1 \pm \mu)(2 \pm \mu) \cdots (n \pm \mu)}\, a_0$$

Konvencionalno se koristi normiranje

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pm\mu}\, \Gamma(1 \pm \mu)}$$

Kako je

$$(1 \pm \mu)(2 \pm \mu) \cdots (n \pm \mu) \Gamma(1 \pm \mu) = \Gamma(n + 1 \pm \mu)$$

imamo

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n \pm \mu} n! \Gamma(n + 1 \pm \mu)}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + 1 + \mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\mu} \equiv J_\mu(x)$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + 1 - \mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\mu} \equiv J_{-\mu}(x)$$

Ovdje uvedene funkcije J_μ i $J_{-\mu}$ su **Besselove funkcije prve vrste**, reda μ i $-\mu$. Koristeći Wronskijan, može se provjeriti kako su u ovom slučaju J_μ i $J_{-\mu}$ linearno nezavisne funkcije.

b) $\mu = m/2$, gdje je m neparan prirodni broj. U ovom slučaju je razlika $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$, međutim, direktnim uvrštavanjem korjena indicijalne jednadžbe opet dobivamo oba rješenja. Kako je m neparan broj, u rekurziji

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm m)}$$

se neće dogoditi dijeljenje s nulom dok je n paran broj. Općenito je opet $a_1 = 0$ (a stoga i $a_{2n+1} = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$), ali moramo pažljivije pogledati što se događa u $m = 1$ slučaju, gdje kod drugog rješenja konstanta a_1 ne mora nužno biti nula. Prvo rješenje (za $\lambda = 1/2$),

$$y_1(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n} = a_0 x^{\frac{1}{2}}\, \frac{\sin x}{x} = a_0\, \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

U drugom rješenju imamo parni i neparni dio reda,

$$y_2(x) = a_0 x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + a_1 x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n} =$$

$$= a_0\, \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + a_1\, \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Vidimo da je neparni dio drugog rješenja proporcionalan prvom rješenju (pa ga možemo izostaviti iz konačnog zapisa). Koristeći konvencionalnu normalizaciju imamo

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pm\frac{1}{2}}\Gamma(1 \pm \frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,, \quad J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

c) $\mu = m \in \mathbb{N}_0$. Prvo rješenje

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Kod drugog rješenja, u rekurziji

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2m)}$$

koeficijent a_{2m} formalno divergira (imamo dijeljenje s nulom). S druge strane, ako u općenitom izrazu pokušamo uvrstiti $\mu = -m$ dobivamo

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1-m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$

Primjetimo da je za $n = 0, 1, \ldots, m-1$ argument gama funkcije u nazivniku negativan cijeli broj, gdje gama funkcija divergira (preciznije, ima polove), pa ti članovi u sumi iščezavaju (ovo je ekvivalentno odabiru $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2(m-1)} = 0$ kako bi se izbjeglo dijeljenje s nulom u rekurziji, te $a_{2m} \neq 0$ kako bi rješenje bilo netrivijalno). Imamo stoga

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1-m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$

Korištenjem supstitucije $k = n - m$ dobivamo

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} =$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+m)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = (-1)^m J_m(x)$$

Dakle, dobivena funkcija J_{-m} proporcionalna funkciji J_m, pa moramo dalje tražiti drugo, linearno nezavisno rješenje jednadžbe u ovom slučaju.

U potrazi za drugim rješenjem u $\mu \in \mathbb{Z}$ slučaju, uvodimo tzv. **Besselovu funkciju druge vrste** ili **Neumannovu funkciju** N_μ (u dijelu literature se koristi oznaka Y_μ, ali mi je nećemo koristiti kako bi izbjegli zabunu s kuglinim funkcijama)

$$N_\mu(x) = \frac{\cos(\pi\mu)J_\mu(x) - J_{-\mu}(x)}{\sin(\pi\mu)} \tag{9.27}$$

Očigledno, za $\mu \notin \mathbb{Z}$ funkcija N_μ je linearna kombinacija rješenja Besselove jednadžbe, pa je i sama rješenje Besselove jednadžbe. Nadalje, za $\mu \notin \mathbb{Z}$ funkcija N_μ je linearno nezavisna od Besselove funkcije prve vrste J_μ, pa općenito rješenje možemo pisati u obliku

$$y(x) = aJ_\mu(x) + bN_\mu(x) \tag{9.28}$$

No, što se događa u $\mu \in \mathbb{Z}$ slučaju? Uvrštavanjem cjelobrojnog parametra μ u definiciju funkcije N_μ dobivamo neodređen izraz $0/0$, pa se valja poslužiti L'Hospitalovim pravilom,

$$N_m(x) = \lim_{\mu\to m} \frac{\cos(\pi\mu)J_\mu(x) - J_{-\mu}(x)}{\sin(\pi\mu)} = \lim_{\mu\to m} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial\mu} - (-1)^\mu \frac{\partial J_{-\mu}(x)}{\partial\mu}\right)$$

Sada ćemo dokazati da je ovo i dalje rješenje Besselove jednadžbe. Deriviranjem Besselove jednadžbe za $J_{\pm\mu}$ po varijabli μ dobivamo

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial J_\mu}{\partial\mu} + x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial J_\mu}{\partial\mu} + (x^2-\mu^2)\frac{\partial J_\mu}{\partial\mu} = 2\mu J_\mu$$

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial J_{-\mu}}{\partial\mu} + x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial J_{-\mu}}{\partial\mu} + (x^2-\mu^2)\frac{\partial J_{-\mu}}{\partial\mu} = 2\mu J_{-\mu}$$

Množenjem druge jednadžbe s $(-1)^{\mu+1}$, zbrajanjem s prvom jednadžbom, dijeljenjem s π, te promatranjem limesa $\mu \to m$ dobivamo

$$x^2 N_m''(x) + xN_m'(x) + (x^2 - m^2)N_m(x) = 0$$

Teorem 9.8. *Razvoji Neumannovih fukcija za $m = 0$,*

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\big(\ln(x/2) + \gamma\big)J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \tag{9.29}$$

i za $m \in \mathbb{N}$

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi}\big(\ln(x/2) + \gamma\big)J_m(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(H_{n+m}+H_n)}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \tag{9.30}$$

Ovdje je γ Euler-Mascheronijeva konstanta, a H_n parcijalni harmonički red.

Dokaz : Prilikom deriviranja imamo

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\,\frac{1}{\Gamma(n+1+\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu} = -\frac{\psi(n+1+\mu)}{\Gamma(n+1+\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu} + \frac{(x/2)^{\mu}\ln(x/2)}{\Gamma(n+1+\mu)}$$

gdje je ψ digama funkcija

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Koristit ćemo razvoj

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}\right)$$

te

$$\psi(n+1) = -\gamma + H_n\ , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gdje je γ Euler-Mascheronijeva konstanta, H_n parcijalni harmonijski red (uz $H_0 \equiv 0$). Za $n+1-m \leq 0$ imamo

$$\frac{\psi(n+1-m)}{\Gamma(n+1-m)} = (-1)^{m-n}(m-n-1)!$$

jer je

$$\frac{\psi(-N)}{\Gamma(-N)} = (-1)^{N+1}N!$$

S druge strane, za $n+1\pm m > 0$ imamo

$$\frac{\psi(n+1\pm m)}{\Gamma(n+1\pm m)} = \frac{-\gamma + H_{n\pm m}}{(n\pm m)!}$$

Promotrimo prvo $m=0$ slučaj,

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{\mu\to 0}\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial\mu}$$

Uvrštavanjem gore navedenih izraza imamo

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{-\gamma+H_n}{n!} + \frac{\ln(x/2)}{n!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\big(\ln(x/2)+\gamma\big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

čime je dokazan prvi dio tvrdnje. Nadalje, promotrimo slučaj $m \in \mathbb{N}$. Opet, uvrštavanjem imamo

$$N_m(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{-\gamma+H_{n+m}}{(n+m)!} + \frac{\ln(x/2)}{(n+m)!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} +$$

$$+\frac{(-1)^m}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n}{n!}\left(-(-1)^{m-n}(m-n-1)! + \frac{\ln(x/2)}{\Gamma(n+1-m)}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m} +$$

$$+\frac{(-1)^m}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{-\gamma+H_{n-m}}{(n-m)!} + \frac{\ln(x/2)}{(n-m)!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$

Drugi član u drugoj sumi iščezava jer je argument gama funkcije negativan cijeli broj. Članove uz Euler-Mascheronijevu konstantu γ i logaritam možemo udružiti, pa imamo

$$N_m(x) = \frac{1}{\pi}\big(\gamma + \ln(x/2)\big)\big(J_m(x) + (-1)^m J_{-m}(x)\big) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{n+m}}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m} H_{n-m}}{n!(n-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$

Kako je $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, preostaje još dovesti posljednju sumu u oblik iz tvrdnje. Koristeći supstituciju $k = n - m$, pa zamjenu slijepih indeksa $k \to n$, imamo

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m} H_{n-m}}{n!(n-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k H_k}{(k+m)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(n+m)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

čime je dokazana tvrdnja. □

Neke specijalne vrijednosti. Iz dobivenih razvoja odmah vidimo da je

$$J_0(0) = 1 \quad \text{i} \quad J_\mu(0) = 0 \quad \text{za} \quad \mu > 0$$

Kod Besselovih funkcija negativnog reda imamo $J_\mu(0) = \pm\infty$ za $\mu < 0$ i $\mu \notin \mathbb{Z}$ (predznak beskonačnosti ovisi o gama funkciji), dok za $\mu = -m$, gdje je $m \in \mathbb{N}$ imamo $J_m(0) = 0$ (jer je $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$). Nadalje, uzimajući u obzir da je za svaki $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0^+}(x/2)^m \ln(x/2) = \{y = -\ln(x/2)\} = \lim_{y\to\infty} -ye^{-my} = 0\,,$$

slijedi da kod N_0 divergira logaritamski član, a kod ostalih N_m (za $m \in \mathbb{N}$) član uz x^{-m}, pa je

$$N_m(0) = -\infty \quad \text{za} \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Asimptotski razvoji. Uvrštavanjem supstitucije $y(x) = u(x)/\sqrt{x}$,

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(u'(x) - \frac{u(x)}{2x}\right)\;,\quad y''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(u''(x) - \frac{u'(x)}{x} + \frac{3u}{4x^2}\right)$$

u Besselovu jednadžbu, nakon sređivanja dobivamo ODJ

$$u''(x) + \left(1 - \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)u(x) = 0$$

U limesu kada $x \to \infty$ jednadžba se svodi na

$$u''(x) + u(x) = 0\,,\quad u(x) = A\cos(x+\delta)$$

pa su rješenja Besselove jednadžbe asimptotski oblika

$$y(x) \sim \frac{\cos(x+\delta)}{\sqrt{x}}$$

Rigoroznijom analizom dobije se

$$J_\mu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2})$$

$$N_\mu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2})$$

Neka formalna svojstva. Konvergencija reda za $J_\mu(x)$; test omjerom (za $|x| \le R$)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2} x^{2(n+1)+\mu}}{a_n x^{2n+\mu}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{4(n+1)(n+1+\mu)} = 0$$

Uniformna konvergencija; Weierstraßov M-test,

$$\left| \frac{x^{2n+\mu}}{n!\,\Gamma(n+1+\mu)2^{2n+\mu}} \right| \le \frac{R^{2n+\mu}}{n!\,\Gamma(n+1+\mu)2^{2n+\mu}} \equiv M_n$$

Suma $\sum_n M_n$ konvergira; test omjerom,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{M_{n+1}}{M_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{R^2}{4(n+1)(n+1+\mu)} = 0$$

$J_\mu(x)$ ili preciznije $J(\mu, x)$ je neprekidna funkcija varijable μ za fiksni $x \neq 0$ (uniformno konvergentan red neprekidnih funkcija). Za $\mu = m \in \mathbb{Z}$ funkcija $J_m(x)$ je jednoznačna (imamo cjelobrojne potencije u redu), a za $\mu \notin \mathbb{Z}$ funkcija $J_\mu(x)$ ima točku grananja u ishodištu (algebarski rez za racionalni μ, a logaritamski rez inače).

Teorem 9.9. *Wronskijan Besselovih funkcija,*

$$W[J_\mu, J_{-\mu}](x) = -\frac{2\sin(\mu\pi)}{\pi x} \tag{9.31}$$

$$W[J_\mu, N_\mu](x) = \frac{2}{\pi x} \tag{9.32}$$

Dokaz : Wronskijan i njegova derivacija su po definiciji dani izrazima

$$W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

$$W'[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x)$$

Promotrimo Besselove jednadžbe za njena dva različita rješenja, y_1 i y_2,

$$x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) + (x^2 - \mu^2) y_1(x) = 0$$

$$x^2 y_2''(x) + x y_2'(x) + (x^2 - \mu^2) y_2(x) = 0$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo s y_2, drugu jednadžbu s y_1, te ih oduzmemo, dobivamo

$$x^2 W'(x) + x W(x) = 0$$

Djeljenjem s x i sređivanjem

$$\frac{W'}{W} = -\frac{1}{x}$$

$$W(x) = \frac{C}{x}$$

Koristeći razvoje u okolini $x = 0$ možemo fiksirati integracijsku konstantu.

$$J_\mu(x) = \frac{(x/2)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\left(1 + O(x^2)\right), \quad J'_\mu(x) = \frac{(x/2)^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)}\left(1 + O(x^2)\right)$$

$$N_\mu(x) = -\frac{\Gamma(\mu)}{\pi}\frac{1}{(x/2)^\mu}\left(1 + O(x)\right), \quad N'_\mu(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi}\frac{1}{(x/2)^{\mu+1}}\left(1 + O(x)\right)$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\ln x + O(1), \quad N'_0(x) = \frac{2}{\pi x} + O(x)$$

Imamo

$$W[J_\mu, J_{-\mu}](x) = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\frac{1}{2\Gamma(-\mu)} - \frac{1}{2\Gamma(\mu)}\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\right) + O(x) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{\sin(-\mu\pi)}{\pi} - \frac{\sin(\mu\pi)}{\pi}\right) + O(x) = -\frac{2\sin(\mu\pi)}{\pi x} + O(x)$$

$$C_\mu = -\frac{2\sin(\mu\pi)}{\pi}$$

$$W[J_\mu, N_\mu](x) = \frac{2}{\pi x} + O(x), \quad C = \frac{2}{\pi}$$

□

Teorem 9.10. *Funkcija izvodnica*

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \tag{9.33}$$

DOKAZ :

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{r+s}\frac{t^{r-s}}{r!s!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\right)$$

gdje smo upotrijebili zamjenu $r = n + s$. □

Jedna od rekurzija

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) \tag{9.34}$$

Dokaz pomoću funkcije izvodnice:

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}, \quad \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}$$

$$\frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}$$

Rezultat slijedi usporedbom koeficijenata uz t^{n-1}.

Ortogonalnost Besselovih funkcija. Promotrimo opet radijalnu jednadžbu (u slučaju $p = 0$ ili s oznakom $k^2 - p^2 \to k^2$),

$$s^2 R''(s) + sR'(s) + (k^2 s^2 - m^2)R(s) = 0$$

$$x = ks\ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = k\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ , \quad y(x) = R(x/k)$$

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - m^2)y(x) = 0\ , \quad y(x) = AJ_m(x) + BN_m(x)$$

$$R(s) = AJ_m(ks) + BN_m(ks)$$

Pretpostavimo da promatramo problem na intervalu $[0, a]$ s Dirichletovim rubnim uvjetom $R(a) = 0$ ili Neumannovim rubnim uvjetom $R'(a) = 0$. Tada je $B = 0$ i

$$J_m(ka) = 0\ , \quad k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \quad \text{ili} \quad J'_m(ka) = 0\ , \quad k_{mn} = \frac{\beta_{mn}}{a}$$

gdje su α_{mn} nul-točke funkcije $J_m(x)$, a β_{mn} nul-točke funkcije $J'_m(x)$.

$$\big(sJ'_m(k_{mn}s)\big)' + \left(k_{mn}^2 s - \frac{m^2}{s}\right) J_m(k_{mn}s) = 0$$

$$\big(sJ'_m(k_{mn'}s)\big)' + \left(k_{mn'}^2 s - \frac{m^2}{s}\right) J_m(k_{mn'}s) = 0$$

Množenjem prve jednadžbe $J_m(k_{mn}s)$, druge s $J_m(k_{mn'}s)$, oduzimanjem, te integriranjem na intervalu $[0, a]$ dobivamo

$$\int_0^a \Big(s\big(J'_m(k_{mn}s)J_m(k_{mn'}s) - J_m(k_{mn}s)J'_m(k_{mn'}s)\big)\Big)'\,\mathrm{d}s =$$

$$= (k_{mn}^2 - k_{mn'}^2) \int_0^a J_m(k_{mn}s)J_m(k_{mn'}s)\, s\,\mathrm{d}s$$

Lijeva strana iščezava u granicama integracije (bilo da je posrijedi Dirichletov ili Neumannov rubni uvjet u $s = a$). Dakle, u slučaju kada je $k_{mn} \neq k_{mn'}$ imamo ortogonalnost u obliku

$$\int_0^a J_m(k_{mn}s)J_m(k_{mn'}s)\, s\,\mathrm{d}s = 0$$

Nadalje, promotrimo integral

$$\int J_m^2(\kappa s)\, s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\kappa^2} \int J_m^2(x)\, x\,\mathrm{d}x$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int J_m^2(x)\, x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\, J_m^2(x) - \int J_m(x)J'_m(x)x^2\,\mathrm{d}x$$

Nadalje, koristeći Besselovu jednadžbu

$$x^2 J_m(x) = m^2 J_m(x) - xJ'_m(x) - x^2 J''_m(x)$$

imamo

$$\int J_m^2(x)x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\, J_m^2(x) - \frac{m^2}{2}\, J_m^2(x) + \frac{x^2}{2}\, \big(J'_m(x)\big)^2 + \text{konst.}$$

odnosno

$$\int J_m^2(\kappa s)\, s\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\left(s^2 - \frac{m^2}{\kappa^2}\right) J_m^2(\kappa s) + s^2 \big(J_m'(\kappa s)\big)^2\right)$$

Koristeći rubne uvjete i činjenicu da je $mJ_m(0) = 0$ za sve $m \in \mathbb{N}_0$, imamo

$$\int_0^a J_m^2\left(\alpha_{mn}\, \frac{s}{a}\right) s\, \mathrm{d}s = \frac{a^2}{2} \big(J_m'(\alpha_{mn})\big)^2$$

ili

$$\int_0^a J_m^2\left(\beta_{mn}\, \frac{s}{a}\right) s\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{\kappa^2}\right) J_m^2(\beta_{mn})$$

Koristeći jednu od rekurzija možemo pisati

$$J_m'(\alpha_{mn}) = -J_{m+1}(\alpha_{mn})$$

Razvoji po Besselovim funkcijama na intervalu $[0, a]$. Za svaku vrijednost parametra $\mu \geq -1$ imamo Fourier-Besselov red

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\mu n} J_\mu\left(\alpha_{\mu n}\, \frac{s}{a}\right) \ , \quad A_{\mu n} = \frac{2}{a^2 J_{\mu+1}^2(\alpha_{\mu n})} \int_0^a f(s) J_\mu\left(\alpha_{\mu n}\, \frac{s}{a}\right) s\, \mathrm{d}s$$

Neumannov red

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\mu+n}(z)$$

Kapteyinov red (kod Keplerovog problema)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\mu+n}((\mu+n)z)$$

Schlömilchov red

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\mu(nx)$$

Napomena: Ponekad se uvode tzv. **Hankelove funkcije**,

$$H_\mu^{(1)}(x) = J_\mu(x) + iN_\mu(x) \ , \quad H_\mu^{(2)}(x) = J_\mu(x) - iN_\mu(x) \tag{9.35}$$

Promotrimo sljedeći primjer: traži se stacionarno rješenje ($k = 0$) toplinske jednadžbe za cilindar duljine L i radijusa r, kojem baze održavamo na temperaturi 0, a plašt na nekoj temperaturi $u_0 \neq 0$. U z-smjeru imamo

$$Z(z) = a\cos(pz) + b\sin(pz)$$

$$0 = Z(0) = a \ , \quad 0 = Z(L) = b\sin(pL) \ , \quad p = \frac{n\pi}{L} \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Time radijalna jednadžba poprima oblik

$$s^2 R'' + sR' - \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \, s^2 + m^2 \right) R = 0$$

Ovo se svodi na ODJ

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \mu^2) y = 0 \tag{9.36}$$

koja za rješenja ima **modificirane Besselove funkcije** prve i druge vrste, I_μ i K_μ,

$$y(x) = A I_\mu(x) + B K_\mu(x) \tag{9.37}$$

$$I_\mu(x) = i^{-\mu} J_\mu(ix) \; , \quad K_\mu(x) = \frac{\pi}{2} \, i^{\mu+1} H_\mu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} \, \frac{I_{-\mu}(x) - I_\mu(x)}{\sin(\mu\pi)} \tag{9.38}$$

To znači da je radijalno rješenje našeg problema oblika

$$R_{mn}(s) = A_{mn} I_m \left(\frac{n\pi s}{L} \right) + B_{mn} K_m \left(\frac{n\pi s}{L} \right)$$

Kako su funkcije $K_m(x)$ divergentne u $x = 0$, ovdje otpadaju iz rješenje. [ostatak rješenja: Butkov, str.394–398]

Konačno, u radijalnom dijelu Helmholtzove jednadžbe u sfernom koordinatnom sustavu nailazimo na ODJ

$$x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - \ell(\ell+1)) y = 0 \tag{9.39}$$

za rješenje ima **sferne Besselove** j_ℓ i **sferne Neumannove funkcije** n_ℓ,

$$y(x) = A j_\ell(x) + B n_\ell(x) \tag{9.40}$$

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \, J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \; , \quad n_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \, N_{\ell+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \, J_{-\ell-\frac{1}{2}}(x) \tag{9.41}$$

Na primjer,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \; , \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

Teorem 9.11.

$$f_\ell(x) = (-1)^\ell x^\ell \left(\frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^\ell f_0(x) \tag{9.42}$$

gdje je $f_\ell(x)$ bilo $j_\ell(x)$ ili $n_\ell(x)$.

Ostale specijalne funkcije: Laguerrovi polinomi (u radijalnom dijelu Schrödingerove jednadžbe za vodikov atom), Hermiteovi polinomi (kod Schrödingerove jednadžbe za kvantnomehanički harmonički oscilator), hipergeometrijske i konfulentne hipergeometrijske funkcije, itd.

§ 9.5 Sturm-Liouvilleov problem

Ranije smo pokazali kako je ODJ

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

moguće prevesti u oblik

$$\big(p(x)y'(x)\big)' - f(x)y(x) = 0$$

Ovdje ćemo razmotriti **Sturm-Liouvilleov** problem

$$L[y](x) = \lambda r(x)y(x)\ , \quad L[y] = (py')' - sy \tag{9.43}$$

Primjeri:

- Harmonički oscilator
$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$
$p(x) = r(x) = 1$, $s(x) = 0$, $\lambda = -\omega^2$

- Legendreova jednadžba
$$((1-x^2)y(x)')' + \ell(\ell+1)y(x) = 0$$
$p(x) = 1 - x^2$, $s(x) = 0$, $r(x) = 1$, $\lambda = -\ell(\ell+1)$

- Besselova jednadžba u obliku
$$x^2 y(x) + xy'(x) + (k^2x^2 - m^2)y(x) = 0$$
Dijeljenjem s x poprima oblik
$$(xy(x)')' + \left(k^2 x - \frac{m^2}{x}\right) y = 0$$
$p(x) = r(x) = x$, $s(x) = -m^2/x$, $\lambda = -k^2$

- Čebiševljeva jednadžba,
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$
$$(\sqrt{1-x^2}\, y')' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\, y = 0$$
$$p(x) = \sqrt{1-x^2}\ , \quad s(x) = 0\ , \quad r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \lambda = -n^2$$

Teorem 9.12. *Rješenja Sturm-Liouvillovog problema, u_1 i u_2, koja zadovoljavaju rubne uvjete*

$$pu_1u_2'\big|_a^b = 0 = pu_2u_1'\big|_a^b$$

i odgovaraju različitim vrijednostima parametra λ su međusobno ortogonalna s obzirom na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b r(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.44}$$

Iako na prvi pogled traženi rubni uvjeti u teoremu izgledaju "umjetni", valja primjetiti kako oni, između ostalog, uključuju i slučajeve kada rješenja promatranog problema zadovoljavaju Dirichletov ili Neumannov rubni uvjet.

Dokaz :

$$L[u_1](x) = \lambda_1 r(x)u_1(x)$$
$$L[u_2](x) = \lambda_2 r(x)u_2(x)$$

Množenjem prve s u_2, druge s u_1, oduzimanjem i integriranjem imamo

$$\int_a^b \big[p(x)(u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x))\big]'\,\mathrm{d}x = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b r(x)u_1(x)u_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$p(x)(u_1'(x)u_2(x) - u_1(x)u_2'(x))\big|_a^b = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b r(x)u_1(x)u_2(x)\,\mathrm{d}x$$

Koristeći pretpostavku o rubnim uvjetima te pretpostavljajući da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, slijedi

$$\langle u_1, u_2\rangle = 0$$

□

Usputna napomena: SL operator je Hermitski operator. Ako su f, g rješenja SL problema, tada je

$$\int_a^b fL[g]\,\mathrm{d}x = \int_a^b gL[f]\,\mathrm{d}x$$

10
Varijacijski račun

Euler-Lagrangeove jednadžbe. Zadan je funkcional I pomoću funkcije F klase C^2 u svakoj od svojih argumenata,

$$I[y, y'] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{10.1}$$

Tražimo stacionarno rješenje $y_0(x)$, takvo da je

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = 0\ , \quad y(x) = y_0(x) + \epsilon\eta(x)$$

gdje je $\eta(x)$ proizvoljna C^2 funkcija, takva da je $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Koristeći Taylorov teorem,

$$I(\epsilon) = \int_a^b F(x, y_0(x) + \epsilon\eta(x), y_0'(x) + \epsilon\eta'(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b F(x, y_0, y_0')\,\mathrm{d}x + \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_0}\,\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y_0'}\,\eta'(x) \right) \mathrm{d}x + O(\epsilon^2)$$

Parcijalna integracija,

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y_0'}\,\eta'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial y_0'}\,\eta(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_0'}\right)\eta(x)\,\mathrm{d}x$$

Zbog rubnih uvjeta prvi član propada, pa imamo

$$\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x)\,\mathrm{d}x$$

Sada ćemo dokazati važnu lemu.

Lema 10.1. **(Fundamentalna lema varijacijskog računa)** *Neka je $k \in \mathbb{N}_0$ i $f \in C^k([a, b])$, takva da je*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{10.2}$$

za sve $\eta \in C^k([a, b])$ funkcije, takve da je $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Tada je $f(x) = 0$ za svaki $x \in [a, b]$.

DOKAZ : Pretpostavimo da postoji $x_0 \in [a,b]$, takav da je $f(x_0) \neq 0$. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $f(x_0) > 0$ (dokaz je analogan u suprotnom slučaju). Kako je po pretpostavci f neprekidna funkcija, postoji okolina

$$O = \langle x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon \rangle$$

točke x_0, takva da je $f(x) > c > 0$ za sve $x \in O \cap [a,b]$. Nadalje, koristeći primjer test funkcije iz poglavlja o distribucijama, možemo odabrati glatku funkciju

$$\eta(x) = \chi_{[p,q]} \exp\left(\frac{q-p}{(x-p)(x-q)}\right) ,$$

gdje je $[p,q] \subset O \cap [a,b]$, te vrijedi

$$\int_a^b \eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_O \eta(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Tada imamo

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_O f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x > c\int_O \eta(x)\,\mathrm{d}x > 0 ,$$

u kontradikciji s pretpostavkom leme. □

Odavde odmah slijedi **Euler-Lagrangeova jednadžba**

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{10.3}$$

Izvod pomoću **funkcionalne derivacije**,

$$\frac{\delta I[y,y']}{\delta y(\xi)} \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big(I[y(x)+\epsilon\delta(x-\xi), y'(x)+\epsilon\delta'(x-\xi)] - I[y(x),y'(x)]\Big)$$

$$I[y(x)+\epsilon\delta(x-\xi), y'(x)+\epsilon\delta'(x-\xi)] =$$
$$= \int_a^b F(x, y(x)+\epsilon\delta(x-\xi), y'(x)+\epsilon\delta'(x-\xi))\,\mathrm{d}x$$

$$F(x, y(x)+\epsilon\delta(x-\xi), y'(x)+\epsilon\delta'(x-\xi)) = F(x,y,y')+$$
$$+\epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta(x-\xi) + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta'(x-\xi)\right) + O(\epsilon^2)$$
$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta I[y,y']}{\delta y(\xi)} = \frac{\partial F}{\partial y}(\xi) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}(\xi)$$

Specijalni slučajevi.

a)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{konst.}$$

Primjer #1: pronaći krivulju najkraće duljine između dvije točke u ravnini,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = k$$

Kvadriranjem i sređivanjem

$$y'(x) = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \,, \quad y(x) = \alpha x + \beta$$

odnosno

$$y(x) = y(a) + \frac{y(b)-y(a)}{b-a}\,(x-a)$$

Primjer #2: Svjetlost prolazi kroz medij s nehomogenim indeksom loma, $n(x)$. Pronađite putanju zrake svjetlosti između zadanih točaka (a, h_1) i (b, h_2). Prema Fermatovom principu svjetlost putuje putem za koji mu treba najmanje vremena,

$$v = \frac{c}{n} = \frac{ds}{dt} \,, \quad T[y'] = \frac{1}{c} \int_a^b n(x)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \to \min$$

$$\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}} = k \,, \quad y' = \frac{k}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

$$y(x) = h_1 + \int_a^x \frac{k\,\mathrm{d}x}{\sqrt{n(x)^2-k^2}}$$

Konstanta k se odredi iz preostalog uvjeta $y(b) = h_2$.

b)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y''\,\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial F}{\partial y'} \approx y''\,\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\,\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$$

gdje jednakost $\approx$ naglašava kako je u tom koraku iskorištena Euler-Lagrangeova jednadžba. Time smo izveli tzv. **Beltramijev identitet**,

$$F - y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{konst.} \tag{10.4}$$

§ 10.1 Brahistohrona

Valja pronaći oblik žlijeba, takvog da kuglica koja se kliže niz njega prelazi put između dvije zadane točke u minimalnom vremenu. Možemo bez smanjenja općenitosti smjestiti ishodište koordinatnog sustavu u početnu točku i orijentirati y-os tako da je u smjeru gravitacijskog polja $\mathbf{g}$,

$$y(0) = 0 \,, \quad y(a) = b$$

$$mgy = \frac{mv^2}{2} \,, \quad \sqrt{2gy} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\sqrt{1+y'^2}$$

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,\mathrm{d}x \;\to \min$$

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

Kako F ne ovisi eksplicitno o x, koristimo Beltramijev identitet, koji u ovom slučaju glasi

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = \text{konst.}$$

Sređivanjem dobivamo,

$$1 + y'^2 = \frac{k}{y} \,, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{y}{k - y}}\,\mathrm{d}y$$

gdje smo uveli redefiniranu konstantu k. Supstitucija,

$$y = k\,\frac{1 - \cos\phi}{2} = k \sin^2(\phi/2)$$

$$\mathrm{d}x = k\,\frac{1 - \cos\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi$$

Odabirom rubnog uvjeta $x(0) = 0$, integriranjem dobivamo

$$x(\phi) = \frac{k}{2}\,(\phi - \sin\phi)$$

Nadalje, želimo da putanja prođe kroz točku $C(a, b)$,

$$a = \frac{k}{2}\,(\phi_c - \sin\phi_c) \,, \quad b = \frac{k}{2}\,(1 - \cos\phi_c)$$

odakle ćemo dobiti vrijednost konstante k i parametra ϕ u točki C. Konačno, putanja je dana u parametarskom obliku izrazima

$$x(\phi) = \frac{k}{2}\,(\phi - \sin\phi) \,, \quad y(\phi) = \frac{k}{2}\,(1 - \cos\phi)$$

Valja primjetiti da za $\phi = \pi$ ova krivulja prolazi kroz minimum, pa će u slučaju kada je $\phi_c > \pi$, odnosno za $a > b\pi/2$, kuglica proći kroz minimum žlijeba prije točke C.

§ 10.2 Opne od sapunice

Potencijalna energija opne od sapunice je proporcionalna s njenom površinom. Promotrimo problem oblika opne između dva paralelna prstena radijusa R na razmaku $2b$. Neka je koordinatni sustav orijentiran tako da prsteni leže centrirani u $z = \pm b$ ravninama.

$$da = 2\pi s(z)\sqrt{1 + (s'(z))^2}\,\mathrm{d}z$$

$$A[s] = 2\pi \int_{-b}^{b} s\sqrt{1 + s'^2}\,\mathrm{d}z \to \min$$

Kako podintegralni izraz ne ovisi eksplicitno o z,

$$s\sqrt{1+s'^2} - \frac{ss'^2}{\sqrt{1+s'^2}} = k$$

Sređivanjem dobivamo

$$s'(z) = \frac{1}{k}\,\sqrt{s^2+k^2}\;, \qquad \frac{k\,ds}{\sqrt{s^2+k^2}} = \mathrm{d}z$$

Supstitucija,

$$s(z) = k\,\mathrm{ch}\,u\;, \quad ds = k\,\mathrm{sh}\,u\,du\;, \quad k\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}z\;, \quad u = \frac{z}{k} + C$$

$$s(z) = k\,\mathrm{ch}\Big(\frac{z}{k} + C\Big)$$

Rubni uvjet,

$$R = s(\pm b) = k\,\mathrm{ch}\left(\pm\frac{b}{k} + C\right)$$

nam daje $C = 0$ i

$$R = k\,\mathrm{ch}\left(\frac{b}{k}\right)$$

dok se funkcija oblika opne svodi na

$$s(z) = k\,\mathrm{ch}\Big(\frac{z}{k}\Big)$$

Ima li jednadžba za preostalu konstantu k nužno rješenje? Upotrijebimo li supstituciju $\xi = b/k$, imamo

$$\frac{R}{b}\,\xi = \mathrm{ch}\,\xi$$

Ako je omjer R/b dovoljno velik, tada imamo dva rješenja (jedno stabilno, drugo nestabilno), za neku kritičnu vrijednost ovog omjera postoji samo jedno rješenje, dok za omjere veće od te kritične vrijednosti nema rješenja. U ovom potonjem slučaju film od sapunica će biti razvučen u dvije ravne plohe preko prstena (**Goldschmidtovo rješenje**).

Koliko iznosi spomenuta kritična vrijednost omjera? Pravac koji prolazi kroz ishodište i tangentan je na kosinus hiperbolni,

$$\frac{\mathrm{ch}\,\xi_0 - 0}{\xi_0 - 0} = \mathrm{ch}'\,\xi_0\;, \quad \frac{1}{\xi_0} = \mathrm{th}\,\xi_0\;, \quad \xi_0 \approx 1.19968$$

Odavde imamo kritičnu vrijednost omjera

$$(R/b)_0 = \frac{\mathrm{ch}\,\xi_0}{\xi_0} \approx 1.50888$$

Kolike su površine?

$$A = 2\pi\int_{-b}^{b} k\,\mathrm{ch}^2\Big(\frac{z}{k}\Big)\,\mathrm{d}z = 4\pi\int_0^b k\,\mathrm{ch}^2\Big(\frac{z}{k}\Big)\,\mathrm{d}z$$

Koristeći supstituciju $u = z/k$, i tablični integral

$$\int \operatorname{ch}^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sh}(2x) + 2x}{4} + \text{konst.}$$

imamo

$$A = 4\pi k^2 \int_0^{b/k} \operatorname{ch}^2(u)\,du = \pi k^2 \left(\operatorname{sh}\left(\frac{2b}{k}\right) + \frac{2b}{k} \right) =$$

$$= \pi k^2 \left(2\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)\frac{R}{k} + \frac{2b}{k} \right) = 2\pi k \left(R\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right) + b \right)$$

Površina opne Goldschmidtovog rješenja (površina dva kruga),

$$A_G = 2\pi R^2$$

§ 10.3 Varijacije s ograničenjima

Uvod o Lagrangeovim multiplikatorima. Promotrimo jednostavan primjer: visina točaka na nekom brdu zadana je funkcijom $h(x, y)$. Ako tražimo lokalne ektreme na ovom brdu, tada ćemo promatrati skup jednadžbi $\partial_x h = 0 = \partial_y h$. Međutim, problem može biti i složniji ako je npr. ako je naše gibanje po ovom brdu *ograničeno* na neki put zadan (implicitnom) jednadžbom $g(x, y) = 0$. Tada nas zanimaju točke u kojima su tangente na krivulju $g(x, y) = 0$ (koje definiraju naš "smjer gibanja" po tom putu) kolinearne s tangentama na izohipse $h(x, y) = \text{konst.}$ Drugim riječima tražimo točke u kojima su pripadne normale proporcionalne, $\boldsymbol{\nabla} h = -\lambda \boldsymbol{\nabla} g$. Promotrimo nešto općenitiji problem: želimo pronaći ograničenja funkcije $F(x_1, \dots, x_n)$ s N ograničenja $G_j(x_1, \dots, x_n) = 0$. Tada uvodimo pomoćnu funkciju

$$H(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_N) = F(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j G_j(x_1, \dots, x_n)$$

kojoj tražimo ekstreme *bez ograničenja*,

$$0 = \mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{\partial G}{\partial x_k} \right) \mathrm{d}x_i + \sum_{j=1}^{N} G_j\, \mathrm{d}\lambda_j$$

Odavde slijedi

$$\boldsymbol{\nabla} F + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \boldsymbol{\nabla} G_k = 0 \;, \quad G_j = 0$$

Promotrimo sada analogni problem u računu varijacija. Tražimo funkciju $y_0(x)$ koja zadovoljava zadane rubne uvjete u $x = a$ i $x = b$, te za koju funkcional

$$I[y, y'] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

poprima stacionarnu vrijednost uz ograničenje oblika

$$J[y,y'] = \int_a^b G(x,y,y')\,\mathrm{d}x = 0$$

Tvrdimo da je ovaj problem ekvivalentan pronalaženju funkcije $y_0(x)$ koja zadovoljava iste rubne uvjete u $x = a$ i $x = b$, te za koju funkcional

$$K[y,y'] = \int_a^b H(x,y,y')\,\mathrm{d}x\ , \quad H(x,y,y') = F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y')$$

poprima stacionarnu vrijednost bez ograničenja (uz neke tehničke zahtjeve). Konstantu λ na kraju određujemo iz jednadžbe ograničenja. [nedovršeno]

§ 10.4 Lančanica

Pronađite oblik homogene niti (lanca) linearne gustoće ρ i duljine ℓ, obješene o dvije zadane točke, $(-a,h_1)$ i (a,h_2), koja slobodno visi u homogenom gravitacijskom polju s akceleracijom g (eng. *catenary curve*). Ukupna potencijalna energija i duljina niti

$$E = \int dm\,gy = \rho g \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\ , \quad \ell = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$F(y,y') = \rho g y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\left(\ell - \sqrt{1+y'^2}\right) =$$

$$= \lambda\ell + (\rho g y + \lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

$$(\rho g y + \lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\, y'^2 = k$$

$$y'^2 = \left(\frac{\rho g y + \lambda}{k}\right)^2 - 1\ , \quad \left(\left(\frac{\rho g y + \lambda}{k}\right)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

Supstitucija

$$\rho g y + \lambda = k \operatorname{ch} z\ , \quad \mathrm{d}y = \frac{k}{\rho g} \operatorname{sh} z\,\mathrm{d}z$$

$$\frac{k}{\rho g} \operatorname{ch}^{-1}\!\left(\frac{\rho g y(x) + \lambda}{k}\right) = x + C$$

Tri preostale konstante, λ, k i C, određene su položajem rubnih točaka i zadanom duljinom niti. Ako je npr. $h_1 = h_2 = h$, tada je $C = 0$, pa imamo

$$y(x) = -\lambda + \frac{k}{\rho g} \operatorname{ch}\!\left(\frac{\rho g x}{k}\right)$$

Nadalje, iz rubnog uvjeta $y(a) = h$ slijedi

$$h = -\lambda + \frac{k}{\rho g} \operatorname{ch}\!\left(\frac{\rho g a}{k}\right)\ , \quad y(x) = h + \frac{k}{\rho g}\left(\operatorname{ch}\!\left(\frac{\rho g x}{k}\right) - \operatorname{ch}\!\left(\frac{\rho g a}{k}\right)\right)$$

Uvjet na duljinu niti nam daje jednadžbu za preostalu konstantu k,

$$\ell = \int_{-a}^{a} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g x}{k}\right) \mathrm{d}x = \frac{2k}{\rho g} \operatorname{sh}\left(\frac{\rho g a}{k}\right) \ .$$

Napomena: ova jednadžba nema uvijek rješenje; stavimo $\xi = \rho g a / k$,

$$\frac{\ell}{2a}\, \xi = \operatorname{sh} \xi$$

Kako je $\operatorname{sh}'(0) = 1$, to znači da za $\ell/2a > 1$ nema rješenja (razmak među uporišnim točkama je veći od duljine niti)!

§ 10.5 Izoperimetrijski problem

Koja krivulja $y = y(x)$ zadane duljine ℓ povezuje točke $A(a, 0)$ i $B(b, 0)$, tako da je površina između krivulje i x-osi maksimalna.

$$I[y] = \int_a^b y(x)\, \mathrm{d}x = \max$$

$$J[y'] = \left(\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x \right) - \ell = \int_a^b \left(\sqrt{1 + y'^2(x)} - \frac{\ell}{b - a} \right) \mathrm{d}x$$

$$y(a) = y(b) = 0$$

$$H(y, y') = y(x) + \lambda \left(\sqrt{1 + y'^2(x)} - \frac{\ell}{b - a} \right)$$

Kako H ne ovisi eksplicitno o varijabli x možemo koristiti Beltramijev identitet,

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{konst.} \equiv y_0$$

Množenjem s korjenom i sređivanjem imamo

$$y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda(1 + y'^2) - \lambda y'^2 = y_0 \sqrt{1 + y'^2}$$

$$1 + y'^2 = \frac{\lambda^2}{(y - y_0)^2}$$

$$y'(x) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - y_0)^2}}{y - y_0}$$

$$\frac{y - y_0}{\sqrt{\lambda^2 - (y - y_0)^2}}\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

Sada integriramo obje strane,

$$\int \frac{y - y_0}{\sqrt{\lambda^2 - (y - y_0)^2}}\, \mathrm{d}y = x + A$$

Korištenjem supstitucije $u = y - y_0$,

$$\int \frac{u}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2)}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}} = -\sqrt{\lambda^2 - u^2} + B = -\sqrt{\lambda^2 - (y - y_0)^2} + B$$

Sređivanjem i preimenovanjem konstanti možemo rješenje zapisati u implicitnom obliku

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda^2$$

Očigledno, posrijedi je jednadžba kružnice radijusa λ. Vrijednosti konstanti x_0 i y_0 određene su početnim uvjetima,

$$(a - x_0)^2 + y_0^2 = (b - x_0)^2 + y_0^2 = \lambda^2$$

Odavde slijedi $a - x_0 = \pm(b - x_0)$ (gornji predznak daje kontradikciju $a = b$), odnosno

$$x_0 = (a + b)/2 \quad \text{i} \quad y_0 = \lambda\sqrt{1 - \frac{(b - a)^2}{4\lambda^2}}\ .$$

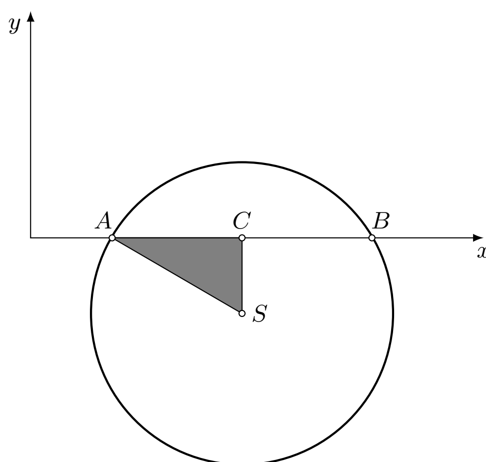
Konačno, uvjet iz ograničenja

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x = \ell$$

nam daje konstantu λ pomoću zadane duljine ℓ i konstanti a i b. Postoji geometrijski prečac u izvrjednjavanju ovog izraza: ako je α središnji kut luka kružnice, tada je $\ell = \alpha\lambda$, odnosno $\alpha = \ell/\lambda$, pa iz transcendentne jednadžbe (vidi osjenčan pravokutni trokut ACS na crtežu),

$$\sin(\ell/2\lambda) = \frac{b - a}{2\lambda}$$

načelno (u praksi, numeričkim postupkom) možemo pronaći vrijednost konstante λ.



§ 10.6 Problem maksimalnog polja

Pronađite (povezanu) homogenu raspodjelu materije, dane ukupne mase M (ili naboja Q), takvu da je klasično gravitacijsko (ili električno) polje maksimalno u danoj točki. Ishodište koordinatnog sustava možemo, bez smanjenja općenitosti, smjestiti u zadanu točku.

Pretpostavit ćemo da je tijelo aksijalno simetrično, te da mu je oblik (profil) zadan funkcijom $s(z)$. Prvo ćemo izračunati pomoćni rezultat, gravitacijsko polje homogenog diska, radijsa R i mase m, duž njegove osi aksijalne simetrije.

$$E(z) = k \int \frac{\sigma \cos\theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\, da' = 2\pi k \sigma z \int_0^R \frac{s\, ds}{(s^2 + z^2)^{3/2}}\,, \quad \sigma = \frac{m}{R^2 \pi}$$

$$E(z) = k\, \frac{2m}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/z)^2}} \right)$$

Sada ćemo napisati izraz za gravitacijsko polje općenitog aksijalno simetričnog homogeno tijela (gustoće ρ) u ishodištu koordinatnog sustava,

$$dE = k\, \frac{2dm}{s^2(z)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (s(z)/z)^2}} \right)\,, \quad dm = \rho\, s^2 \pi\, \mathrm{d}z$$

Kako se doprinosi polju u ishodištu koordinatnog sustava iznad i ispod x-y ravnine doprinose sa suprotnim predznakom, a cilj je postići čim veće polje, pretpostavit ćemo da je sva materija s jedne strane, npr. iznad x-y ravnine (što znači da otpada dio integrala po negativnoj z-osi),

$$E[s(z)] = 2\pi k \rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (s(z)/z)^2}} \right) \mathrm{d}z$$

Ograničenje u ovom problemu je ukupna masa,

$$M = \rho\pi \int_0^\infty s^2(z)\, \mathrm{d}z$$

$$K[s] = E[s] + \lambda \left(M - \rho\pi \int_0^\infty s^2(z)\, \mathrm{d}z \right)$$

Odavde imamo jednadžbu

$$2\pi k \rho\, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s^2}{z^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{2s}{z} - \rho\pi\lambda 2s = 0$$

Sređivanjem,

$$1 + \frac{s^2}{z^2} = \left(\frac{k}{\lambda z^2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$s(z) = \sqrt{\left(\frac{kz}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} - z^2}\,, \quad z \in \left[0, \sqrt{k/\lambda} \right]$$

Preostalu konstantu λ ćemo dobiti uz uvjeta na ukupnu masu,

$$M = \rho\pi \int_0^{\sqrt{k/\lambda}} \left(\left(\frac{kz}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} - z^2 \right) \mathrm{d}z = \frac{4}{15}\, \rho\pi \left(\frac{k}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\lambda = k \left(\frac{4\rho\pi}{15M} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Dakle, konačno imamo

$$s(z) = \sqrt{\left(\frac{15M}{4\pi\rho} \right) z^{2/3} - z^2}$$

§ 10.7 Varijacijski problemi s više funkcija i više varijabli

Više nepoznatih funkcija, $y_i(x)$ (svaka zadovoljava zadan Dirichletov rubni uvjet u $x = a$ i $x = b$),

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n')\, \mathrm{d}x$$

$$F = F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n')\,, \quad y_i = y_i(x)$$

$$y_i(x) = y_{0_i}(x) + \epsilon_i \eta_i(x)\,, \quad \frac{\partial I}{\partial \epsilon_i} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0\,, \quad i = 1, \dots, n$$

Funkcija više varijabli, $y(x_1, \dots, x_n)$

$$I[y] = \int \cdots \int F(x_1, \dots, x_n, y, \partial_1 y, \dots, \partial_n y)\, \mathrm{d}x_1 \, \dots \, \mathrm{d}x_n$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \frac{\partial F}{\partial(\partial_i y)} = 0$$

Više derivacije, $F = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$,

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0 \tag{10.5}$$

§ 10.8 Geodezici

Zadana je ploha
$$f(x,y,z)=0$$
Traži se krivulja $(x(t),y(t),z(t))$, takva da joj je duljina između dvije zadane točke minimalna,
$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt\to\min$$
s ograničenjem
$$\int_{t_0}^{t}f(x(t),y(t),z(t))\,dt=0$$
Ovo daje jednadžbu
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{F}\right)-\lambda f_x=0\,,\quad F=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$
i analogno za y i z. U slučaju sfere radijusa R,
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$$
imamo jednadžbe geodezika
$$\frac{1}{2x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{F}\right)=\frac{1}{2y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{F}\right)=\frac{1}{2z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{F}\right)=\lambda$$
Promotrimo prvu jednakost,
$$\frac{\ddot{x}F-\dot{x}\dot{F}}{2xF^2}=\frac{\ddot{y}F-\dot{y}\dot{F}}{2yF^2}$$
Odavde slijedi
$$\frac{y\ddot{x}-x\ddot{y}}{y\dot{x}-x\dot{y}}=\frac{\dot{F}}{F}$$
i analogno
$$\frac{z\ddot{y}-y\ddot{z}}{z\dot{y}-y\dot{z}}=\frac{\dot{F}}{F}$$
Izjednačavanjem lijevih strana zadnje dvije jednakosti imamo
$$\frac{\frac{d}{dt}(y\dot{x}-x\dot{y})}{y\dot{x}-x\dot{y}}=\frac{\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z})}{z\dot{y}-y\dot{z}}$$
odakle integriranjem dobivamo
$$y\dot{x}-x\dot{y}=A(z\dot{y}-y\dot{z})$$
$$\frac{\dot{x}+A\dot{z}}{x+Az}=\frac{\dot{y}}{y}$$
Konačno, integriranjem imamo
$$x+Az=By$$
Ovo je jednadžba ravnine kroz ishodište koordinatnog sustava, koja presjeca sferu u velikim kružnicama ("ekvatorima").

§ 10.9 Maxwell-Boltzmannova raspodjela

Vjerojatnost pronalaženja čestice (klasičnog 3D neinteragirajućeg) plina u dijelu faznog prostora brzina $\mathcal{W}$ dan je pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ izrazom

$$P(\mathcal{W}) = \int_{\mathcal{W}} \rho(\mathbf{v})\, d^3v$$

Pri tom pretpostavljamo da je funkcija ρ normirana,

$$\int \rho(\mathbf{v})\, d^3v = 1 \tag{10.6}$$

Želimo pronaći funkciju ρ koja zadovoljava ograničenje (10.6), kao i ograničenje ukupne (prosječne) energije promatranog plina,

$$\int \frac{m\mathbf{v}^2}{2}\, \rho(\mathbf{v})\, d^3v = E \tag{10.7}$$

tako da funkcional entropije poprima stacionarnu (maksimalnu) vrijednost,

$$S[\rho] = -\int \rho(\mathbf{v})\, \ln \rho(\mathbf{v})\, d^3v \to \max \tag{10.8}$$

Konačno rješenje,

$$\rho(\mathbf{v}) = \left(\frac{3m}{4\pi E} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{3m\mathbf{v}^2}{4E} \right) \tag{10.9}$$

Dodaci

A

Konvencije i ostalo

Kroneckerov delta simbol,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases} \tag{A.1}$$

Levi-Civita simbol. U n dimenzija,

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1\,, & \{i_1, \dots, i_n\} \text{ je parna permutacija skupa } \{1, \dots, n\} \\ -1\,, & \{i_1, \dots, i_n\} \text{ je neparna permutacija skupa } \{1, \dots, n\} \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases} \tag{A.2}$$

***θ*-funkcija** (engl. step function, Heaviside step function) $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1\,, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

Ponekad koristimo varijantu ove funkcije,

$$\hat{\theta}(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0 \\ 1/2\,, & x = 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases} \tag{A.4}$$

Parcijalni harmonički red H_n za $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{A.5}$$

Za parcijalne derivacije koristimo nekoliko ekvivalentnih oznaka,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_x \partial_y f = f_{xy}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_x^2 f = f_{xx}$$

Derivacija funkcije $f : S \to \mathbb{R}$ (za neki $S \subset \mathbb{R}^3$) u smjeru vektora $\hat{\mathbf{n}}$,

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r})$$

Kada smo u potrazi za objektima koji bi trebali zadovoljiti neku jednakost, tada iznad znaka jednakosti stavljamo uskličnik. Na primjer, tražimo li veličinu x za koju je ispunjena jednakost $a + x = b$, tada to napomenemo s

$$a + x \stackrel{!}{=} b$$

Izbor oznaka (slova) koje koristimo za indekse u sumama, kao i varijable u integracijama, nisu od esencijalne važnosti za sam račun i stoga ih slobodno možemo mijenjati, bez da time utječemo na rezultat računa,

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{j=1}^{N} a_j \ , \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy \ .$$

Iz ovog razloga ove oznake ponekad zovemo **slijepi** (još i **gluhi** ili **nijemi**) indeksi i varijable.

Grčki alfabet					
A	α	alfa	N	ν	ni
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gama	O	o	omikron
Δ	δ	delta	Π	π, ϖ	pi
E	ϵ, ε	epsilon	R	ρ, ϱ	ro
Z	ζ	zeta	Σ	σ, ς	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ, ϑ	theta	Υ	υ	ipsilon
I	ι	jota	Φ	ϕ, φ	fi
K	κ	kapa	X	χ	hi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mi	Ω	ω	omega

B

Testovi konvergencije

Teorem B.1. Kummerov test. *Neka je* $\sum a_n$ *red pozitivnih realnih brojeva* $a_n > 0$, *a* (p_n) *niz pozitivnih realnih brojeva te vrijedi*

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty}\left(p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right) \leq \limsup_{n\to\infty}\left(p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right) = \beta \tag{B.1}$$

Ako je $\alpha > 0$ *tada* $\sum a_n$ *konvergira. Ako* $\sum 1/p_n$ *divergira i* $\beta < 0$ *tada* $\sum a_n$ *divergira.*

Dokaz : Označimo s $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$ te odaberimo $r \in \langle 0, \alpha\rangle$. Tada postoji prirodan broj $N \geq 2$ takav da za sve $n \geq N$ vrijedi

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} > r$$

odnosno

$$p_n a_n - p_{n+1} a_{n+1} > r a_{n+1}\ .$$

Odavde, za svaki prirodan broj $M > N$ imamo

$$\sum_{n=N}^{M} (p_n a_n - p_{n+1} a_{n+1}) > \sum_{n=N}^{M} r a_{n+1}$$

odnosno

$$p_N a_N - p_{M+1} a_{M+1} > r(s_M - s_{N-1})$$

$$\frac{p_N a_N + r s_{N-1}}{r} > s_M$$

Kako je N fiksan, lijeva strana ove nejednakosti predstavlja gornju među za niz (s_M) odakle slijedi da $\sum a_n$ konvergira.

Pretpostavimo sada da $\sum 1/p_n$ divergira i $\beta < 0$. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N$ vrijedi

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} < 0$$

odnosno

$$p_n a_n < p_{n+1} a_{n+1}$$

Stoga za sve $n > N$ vrijedi $p_n a_n > p_N a_N$ i

$$a_n > \frac{1}{p_n} p_N a_N$$

Kako je N fiksan, a $\sum 1/p_n$ po pretpostavci divergira, testom usporedbe slijedi da $\sum a_n$ divergira. □

Može se dokazati kako za svaki red pozitivnih realnih brojeva postoji niz (p_n) pomoću kojih je moguće ustvrditi konvergentnost danog reda [Tong: *Kummer's Test Gives* ...]. Međutim, pronalaženje takvog pomoćnog niza je često netrivijalno. Na primjer, izbor $p_n = 1$ za sve n svodi Kummerov test na test omjerom. Nadalje, izbor $p_n = n$ daje

Teorem B.2. Raabeov test. *Neka je $\sum a_n$ red pozitivnih realnih brojeva $a_n > 0$ i vrijedi*

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) n \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) n = \beta \tag{B.2}$$

Ako je $\alpha > 1$ tada $\sum a_n$ konvergira. Ako je $\beta < 1$ tada $\sum a_n$ divergira.

Teorem B.3. Gaussov test.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{A}{n} + \frac{B(n)}{n^r}$$

gdje je $B(n)$ omeđen. Tada $\sum a_n$ konvergira akko je $A > 1$.

DOKAZ :

$$\liminf_{n\to\infty} \left(A + \frac{B(n)}{n^{r-1}} \right) = A + \liminf_{n\to\infty} \frac{B(n)}{n^{r-1}} > 1$$

za $A > 1$. □

Upotreba $p_n = n \ln n$ daje tzv. Bertrandov test.

C

Nejednakosti

Ovdje ćemo razmotriti nekoliko elementarnih nejednakosti.

Teorem C.1. (**Youngova nejednakost**) *Neka su $a, b, p, q > 0$ realni brojevi, takvi da je*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{C.1}$$

Tada vrijedi

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{C.2}$$

DOKAZ :

$$ab = \exp(\ln(ab)) = \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{p \ln a}{p} + \frac{q \ln b}{q}\right)$$

Koristeći jednakost (C.1) i konveksnost funkcije exp odavde slijedi

$$ab \leq \frac{\exp(p \ln a)}{p} + \frac{\exp(q \ln b)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

□

Teorem C.2. (**Hölderova nejednakost**) *Neka su $p, q > 0$ realni brojevi koji zadovoljavaju jednakost (C.1). Tada za sve integrabilne funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q} \tag{C.3}$$

DOKAZ : U Youngovu nejednakost uvrstimo

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(y)|^p \, dy\right)^{1/p}}\ , \quad b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(y)|^q \, dy\right)^{1/q}}$$

$$\frac{|f(x)|\,|g(x)|}{\left(\int_a^b |f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(y)|^q\,dy\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|}{\int_a^b |f(y)|^p\,dy} + \frac{1}{q}\,\frac{|f(x)|}{\int_a^b |g(y)|^q\,dy}$$

Integriranjem ove nejednakosti u intervalu $[a, b]$ dobivamo

$$\frac{\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx}{\left(\int_a^b |f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(y)|^q\,dy\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

odakle slijedi Hölderova nejednakost. □

D

Jordanova forma matrice

Nije moguće sve matrice dijagonalizirati, ali ih je barem uvijek moguće svesti na direktnu sumu Jordanovih blokova, gdje je temeljni Jordanov blok $J_n(\lambda) \in M_n(\mathbb{C})$ kvadratna matrica čiji su svi dijagonalni elementi λ, na gornjoj dijagonali ima jedinice, a svi ostali elementi su nule,

$$J_1(\lambda) = (\lambda)\ , \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\ , \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\ , \quad \dots$$

$$J_n(\lambda) = \lambda\mathbb{1} + N\ , \quad N_{ij} = \delta_{i+1,j}$$

Algoritam za svođenje matrice $A \in M_m(\mathbb{C})$ na pripadnu Jordanovu formu J_A.

1. Pronađite svojstvene vrijednosti preko

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{r_n} = 0 \qquad \text{(D.1)}$$

   Svaka svojstvena vrijednost $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ima svoju **algebarsku kratnost** $r_i \leq m$. Algebarska kratnost je veličina pripadnog bloka $B_{r_i}(\lambda_i)$, odnosno svaka svojstvena vrijednost λ_i se na dijagonali pripadnog bloka pojavljuje točno r_i puta,

$$J_A = \bigoplus_{i=1}^{n} B_{r_i}(\lambda_i) \qquad \text{(D.2)}$$

2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i pronađite $\ker(A - \lambda_i\mathbb{1})$. Dimenzija $g_i = \dim\ker(A - \lambda_i\mathbb{1})$ je **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ_i. Geometrijska kratnost nam govori koliki je broj Jordanovih blokova unutar bloka $B_{r_i}(\lambda_i)$,

$$B_{r_i}(\lambda_i) = \bigoplus_{j=1}^{g_i} J_{k(\lambda_i,j)}(\lambda_i)\ , \qquad \text{(D.3)}$$

   gdje tek treba odrediti veličinu $k(\lambda_i, j)$ pojedinih Jordanovih blokova.

3. Uvijek vrijedi $g_i \leq r_i$. Ako je $g_i = r_i$, tada svojstvenoj vrijednosti λ_i pripada dijagonalni blok $\mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i, \dots, \lambda_i)$ veličine $r_i \times r_i$ i za nju je postupak gotov. U protivnom treba provesti naredne korake. Primjetite, čak i ako znamo da je za neku svojstvenu vrijednost λ npr. $r = 5$ i $g = 2$, još ne znamo je li $B_5(\lambda) = J_4(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$ ili $B_5(\lambda) = J_3(\lambda) \oplus J_2(\lambda)$.

4. Pronađite $\ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^\ell$ za $\ell \in \mathbb{N}$. Pripadne dimenzije $\dim \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^\ell$ čine strogo rastući niz koji se u jednom trenutku počne ponavljati, kada se zaustavljamo s postupkom. Odavde izvrijednjujemo razlike

$$\delta(\lambda_i, p) = \dim \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^p - \dim \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{p-1} \tag{D.4}$$

koji nam konačno daju

$$k(\lambda_i, j) = \operatorname{card} \{\delta(\lambda_i, p) \geq j \mid p \geq 1\} \ . \tag{D.5}$$

Time je određena J_A do na permutaciju Jordanovih blokova.

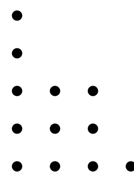
Praktičan savjet pri računanju brojeva $k(\lambda_i, j)$: neka su za svojstvenu vrijednost λ npr.

$$r = 12\ , \quad g = 4\ , \quad \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})^\ell = 4, 7, 10, 11, 12, 12, \ldots$$

Tada razlike $\delta(\lambda, p)$

$$4 - 0 = 4,\ 7 - 4 = 3,\ 10 - 7 = 3,\ 11 - 10 = 1,\ 12 - 11 = 1$$

možemo zapisati kao redove točaka,



Tražene veličine Jordanovih blokova su visine stupaca na ovom prikazu, redom 5, 3, 3 i 1, pa je $B_{12}(\lambda) = J_5(\lambda) \oplus J_3(\lambda) \oplus J_3(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$.

Određivanje matrice S za transformaciju $J_A = S^{-1} A S$. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i i svaki pripadni Jordanov blok $J_k(\lambda_i)$, redom od najvećeg prema manjem:

1. Odaberite vektor $u \in \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^k$ koji *nije* element vektorskog prostora razapet vektorima iz $\ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{k-1}$ te vektorima koji su ranije odabrani u ovom postupku.

2. Izračunajte vektore

$$v_1^{(i)} = (A - \lambda_i \mathbb{1})^{k-1} u\ , \quad v_2^{(i)} = (A - \lambda_i \mathbb{1})^{k-2} u\ , \ \ldots\ , \ v_k^{(i)} = u$$

Stupce matrice S formiramo pomoću dobivenih vektora (pazeći na njihov poredak),

$$S = \left(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_{k_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_{k_2}^{(2)}, v_1^{(3)}, \ldots \right) \tag{D.6}$$

E

Eksponenciranje matrica

Definicija E.1. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$. Eksponenciranje matrice A je definirano s

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \tag{E.1}$$

gdje je $A^0 = \mathbb{1}$.

Za početak nas zanima konvergentnost gornje sume, pa nam je potreban pojam "udaljenosti" među matricama, odnosno norma. Lako se provjeri kako preslikavanje

$$\langle\ ,\ \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}\ , \quad \langle A, B\rangle \equiv \mathrm{Tr}\,(A^\dagger B)$$

zadovoljava svojstva skalarnog produkta. Naime, valja uočiti da je

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \geq 0$$

te

$$\langle B, A\rangle = \mathrm{Tr}\,(B^\dagger A) = \mathrm{Tr}\,((A^\intercal B^*)^\intercal) = \mathrm{Tr}\,(A^\intercal B^*) = (\mathrm{Tr}(A^\dagger B))^* = \langle A, B\rangle^*\ .$$

Pripadna norma poznata je kao **Frobeniusova** ili **Hilbert-Schmidtova norma**,

$$||A||^2 = \langle A, A\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \tag{E.2}$$

Nadalje, koristeći SCB nejednakost za skalarni produkt i normu na $\mathbb{R}^n$,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq ||\mathbf{a}||^2 ||\mathbf{b}||^2$$

promatrajući retke matrice A i stupce matrice B kao vektore,

$$(\mathbf{a}_{(i)})_j = A_{ij}\ , \quad (\mathbf{b}_{(j)})_i = B_{ij}$$

imamo

$$||AB||^2 = \sum_{i,j} (\mathbf{a}_{(i)} \cdot \mathbf{b}_{(j)})^2 \le \sum_{i,j} ||\mathbf{a}_{(i)}||^2 ||\mathbf{b}_{(j)}||^2 =$$

$$= \Big(\sum_i ||\mathbf{a}_{(i)}||^2 \Big) \Big(\sum_j ||\mathbf{b}_{(j)}||^2 \Big) = ||A||^2 ||B||^2$$

odnosno

$$||AB|| \le ||A||\,||B|| \tag{E.3}$$

i stoga, indukcijom slijedi

$$||A^n|| \le ||A||^n$$

Koristeći ove nejednakosti i nejednakost trokuta možemo vidjeti kako suma (E.1) konvergira s obzirom na Frobeniusovu normu za sve matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$: za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left|\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!} \right|\right| \le \sum_{n=0}^{N} \frac{||A^n||}{n!} \le \sum_{n=0}^{N} \frac{||A||^n}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{||A||^n}{n!} = e^{||A||} < \infty \, .$$

Lema E.2. *Ako matrice A i B komutiraju, $[A, B] = AB - BA = 0$, tada vrijedi*

$$Ae^B = e^B A \tag{E.4}$$

Dokaz : Tvrdnja je posljedica komutiranja matrice A i potencija matrice B,

$$AB^n = BAB^{n-1} = B^2 AB^{n-2} = \cdots = B^n A$$

□

Teorem E.3. *Ako matrice A i B komutiraju, $[A, B] = AB - BA = 0$, tada vrijedi*

$$e^{A+B} = e^A e^B \tag{E.5}$$

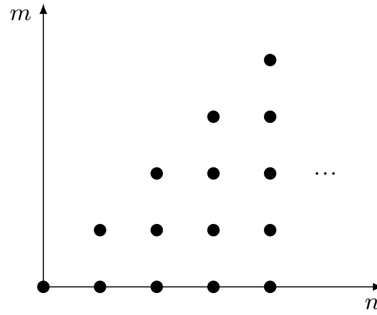
Dokaz :

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{A^m B^{n-m}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{A^m B^{n-m}}{m!(n-m)!}$$

Zamjenom poretka sumacije, pa zamjenom varijable $k = n - m$ ovu dvostruku sumu možemo pisati u obliku

$$e^{A+B} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{A^m B^{n-m}}{m!(n-m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^m B^k}{m!\,k!} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = e^A e^B$$

Zamjenu poretka sumacije možemo lakše predočiti pomoću dijagrama,



□

Komentar E.4. Jednakost $e^{A+B} = e^A e^B$ općenito *ne* vrijedi! //

Korolar E.5. *Za svaku matricu A i kompleksne brojeve $s, t \in \mathbb{C}$ vrijedi*

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} , \tag{E.6}$$

a matrica e^A uvijek ima inverz,

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A} \tag{E.7}$$

Teorem E.6.

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \tag{E.8}$$

Dokaz : Koristeći konvergentnost reda u eksponenciranju matrice, tvrdnju možemo dokazati zamjenom limesa sa sumom,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(e^{(t+\epsilon)A} - e^{tA}\right) = e^{tA} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(e^{\epsilon A} - \mathbb{1}\right) =$$
$$= e^{tA} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\epsilon A)^n}{n!} = e^{tA} A = A e^{tA}$$

ili deriviranjem član po član,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n t^{n-1} A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} A \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = A e^{tA}$$

□

Teorem E.7.

$$\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\, A} \tag{E.9}$$

Valja uočiti kako je matrica e^A uvijek regularna (jer $\det e^A \neq 0$), pa ima inverz, iako matrica A ne mora biti regularna.

Praktično računanje matrice e^A. Ako je D dijagonalna matrica, tada je

$$e^D = \exp\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & & \\ & e^b & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{E.10}$$

Ako je A dijagonalizabilna matrica, tada postoji regularna matrica S, takva da je $S^{-1}AS = D$ dijagonalna matrica. Tada vrijedi

$$A^n = (SDS^{-1})^n = (SDS^{-1})(SDS^{-1})\cdots(SDS^{-1}) = SD^nS^{-1}$$

pa je

$$e^A = e^{SDS^{-1}} = Se^DS^{-1} \tag{E.11}$$

Ako A nije dijagonalizabilna, tada se barem može svesti na blok dijagonalnu (Jordanovu) formu, tj. postoji regularna matrica S, takva da je $S^{-1}AS = J$, gdje je J Jordanova matrica.

Lema E.8.

$$e^{A\oplus B} = e^A \oplus e^B \tag{E.12}$$

Lema E.9. *Neka je $J_k(\lambda)$ Jordanov blok,*

$$J_k(\lambda) = \lambda\mathbb{1} + N\ , \quad N_{ij} = \delta_{i+1,j} \tag{E.13}$$

Tada je

$$e^{tJ_k(\lambda)} = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{E.14}$$

Dokaz : Kako matrice $\lambda\mathbb{1}$ i N komutiraju, vrijedi

$$e^{tJ_k(\lambda)} = e^{t\lambda\mathbb{1}+tN} = e^{t\lambda\mathbb{1}}e^{tN} = e^{t\lambda}\mathbb{1}e^{tN} = e^{t\lambda}e^{tN}$$

Koristeći činjenicu da je (vizualno, potenciranjem matrice N dijagonalni red jedinica se pomiče "gore udesno")

$$(N^n)_{ij} = \delta_{i+n,j}\ ,$$

te $N^n = 0$ za sve $n \geq k$, uvrštavanjem u definiciju eksponenciranja matrice dobivamo traženi oblik matrice iz tvrdnje. □

Na primjer, ako je $J_A = S^{-1}AS = J_3(7) \oplus J_2(5)$, tada je

$$e^{tA} = S \left(e^{7t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) S^{-1}$$

Praktično računanje matrice $e^A v$ bez računanja matrice e^A. Ako je v vlastiti vektor matrice A, tada imamo

$$e^A v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\, v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, v = e^{\lambda} v$$

Ako je A dijagonalizabilna, tada je vektor v moguće prikazati kao linearnu kombinaciju vlastitih vektora matrice A,

$$v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$$

$$e^A v = \alpha_1 e^{\lambda_1} w_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n} w_n$$

Ako je v generalizirani svojstveni vektor, $v \in \ker(A - \lambda \mathbb{1})^m$ tada je

$$e^{tA} v = e^{t\lambda} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(t(A - \lambda \mathbb{1}))^n}{n!}\, v$$

[nedovršeno]

F

Bernoullijevi brojevi i polinomi

Bernoullijevi brojevi B_k pojavljuju se u razvojima nekih funkcija. Na primjer,

$$b(z) \equiv \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n \tag{F.1}$$

Funkcija $b(z)$ ima uklonjiv sigularitet u $z = 0$, te polove prvog reda u $z = 2k\pi i$ za sve $k \in \mathbb{Z}^\times$. Gore naveden Taylorov razvoj funkcije $b(z)$ oko točke $z = 0$ stoga konvergira stoga za $|z| < 2\pi$ te na ovu funkciju možemo gledati kao na funkciju izvodnicu Bernoullijevih brojeva u smislu da je

$$B_n = \lim_{z \to 0} b^{(n)}(z) \tag{F.2}$$

Vrijednosti nekoliko prvih Bernoullijevih brojeva,

$$B_0 = 1\,,\ B_1 = -\frac{1}{2}\,,\ B_2 = \frac{1}{6}\,,\ B_4 = -\frac{1}{30}\,,\ B_6 = \frac{1}{42}\,,\ B_8 = -\frac{1}{30}\,,\ \ldots$$

Lema F.1. *Izuzev B_1, svi ostali neparni Bernoullijevi brojevi iščezavaju, $B_{2n+1} = 0$.*

Dokaz : Ako je f funkcija s dobro definiranom parnošću, odnosno ako je $f(-z) = (-1)^p f(z)$ za neki $p \in \{0, 1\}$, tada se deriviranjem njena parnost mijenja u suprotnu,

$$f'(-z) = (-1)^{p+1} f'(z)\,.$$

Odavde odmah slijedi da koeficijenti uz neparne članove u Taylorovom razvoju parne funkcije oko nule iščezavaju. Uočimo li kako je funkcija

$$b(z) - 1 + \frac{z}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n$$

parna, odmah slijedi tvrdnja. □

U literaturi se ponekad upotrebljava alternativa definicija,

$$b(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\widehat{B}_n}{(2n)!} z^{2n} \tag{F.3}$$

Ovdje su

$$\widehat{B}_1 = \frac{1}{6} , \quad \widehat{B}_2 = \frac{1}{30} , \quad \widehat{B}_3 = \frac{1}{42} , \quad \widehat{B}_4 = \frac{1}{30} , \quad \widehat{B}_5 = \frac{5}{66} , \quad \dots$$

Veza među definicijama,

$$\widehat{B}_n = (-1)^{n+1} B_{2n} , \quad n \in \mathbb{N} \tag{F.4}$$

Lema F.2.

$$\frac{N-1}{2} = \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N+1}{2n} B_{2n} \tag{F.5}$$

Dokaz :

$$1 = \frac{e^z - 1}{z} \frac{z}{e^z - 1} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{m-1}}{m!} \right) \left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \right) =$$

$$= 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(m+1)!} - \frac{1}{2m!} \right) z^m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{m!(2n)!} z^{m+2n-1} =$$

$$= 1 + \sum_{N=2}^{\infty} \left(\frac{1-N}{2(N+1)!} + \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{B_{2n}}{(N+1-2n)!(2n)!} \right) z^N$$

Tvrdnja slijedi jer koeficijenti uz z^N moraju iščezavati. □

Koristeći ovu lemu i činjenicu da je $B_{2n+1} = 0$ za $n \geq 1$ imamo

$$1 + \sum_{m=1}^{N+1} \binom{N+1}{m} B_m = 1 + \frac{N-1}{2} + (N+1) B_1 + B_{n+1} = B_{n+1}$$

Zamjenimo li u sumi na desnoj strani svaki B_m s B^m, potencijom neodređene pomoćne konstante $B \neq 0$, možemo kompaktno zapisati rekurzivnu formulu za Bernoullijeve brojeve,

$$B_{n+1} = (B+1)^{n+1} , \quad n \in \mathbb{N} \tag{F.6}$$

Odavde imamo na primjer,

$$B_2 = B_2 + 2B_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_3 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_4 = B_4 + 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad B_3 = 0$$

i tako dalje.

Neke sume gdje se pojavljuju,

$$B_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) \tag{F.7}$$

Također,

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n} \,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{F.8}$$

Dokaz: integracijom po krivulji s dvije kružnice imamo

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} \frac{b(z)}{z^{2n+1}} \,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) = \int_\Gamma + \int_\gamma = 0 - 2\pi i \frac{B_{2n}}{(2n)!}$$

Asimptotski razvoji i relacije,

$$B_{2n} \sim (-1)^{n+1} 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} \quad \text{kada} \quad n \to \infty \tag{F.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{2n}}{(-1)^{n+1} 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)}{4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}} \zeta(2n) = \lim_{n\to\infty} \zeta(2n) = 1$$

Bernoullijevi polinomi,

$$\frac{z e^{tz}}{e^z - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \frac{z^n}{n!} \tag{F.10}$$

$$B_0(t) = 1 \,, \quad B_n'(t) = n B_{n-1}(t) \,, \quad B_n(0) = B_n = (-1)^n B_n(1)$$

…orginalno definirani na $[0,1]$, pa prošireni periodično

$$\mathcal{B}_n(t) = B_n(t - \lfloor t \rfloor) \,, \quad \mathcal{B}_n(m) = B_n(0) = B_n \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$$

n	$B_n(x)$
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$

Euler-Maclaurinova sumacijska formula

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, takvi da je $a < b$, te $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, ako je $f \in C^{k+1}([a,b])$,

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}}{(r+1)!} \left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a) \right) +$$

$$+\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \mathcal{B}_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{F.11}$$

DOKAZ :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t-n+\frac{1}{2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left(t-n+\frac{1}{2}\right) f(t)\Big|_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n}\left(t-n+\frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{f(n)+f(n-1)}{2} - \int_{n-1}^{n} \mathcal{B}_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(n)-f(n-1)}{2} + \int_{n-1}^{n} \mathcal{B}_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \big(f(b)-f(a)\big)B_1 + \int_a^b \mathcal{B}_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ovo je E-M formula za $k=0$. Koristeći $\mathcal{B}'_{k+1}(t) = (k+1)\mathcal{B}_k(t)$, te činjenicu da je $\mathcal{B}_k(m) = B_k$ za svaki $m \in \mathbb{Z}$, imamo

$$\int_a^b \mathcal{B}_k(t) f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\int_a^b \mathcal{B}'_{k+1}(t) f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{B_{k+1}}{k+1}\big(f(b)-f(a)\big) - \frac{1}{k+1}\int_a^b \mathcal{B}_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Odavde indukcijom slijedi E-M formula za sve $k \in \mathbb{N}$. □

G

Potpunost prostora L^p

Promotrimo Cauchyjev niz $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da je

$$\forall\, m, n > N \;:\; ||f_m - f_n|| < \epsilon$$

To znači da za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo odabrati $\epsilon = 2^{-k}$, za kojeg postoji $\widetilde{N}_k \in \mathbb{N}$, takav da je

$$\forall\, m, n > \widetilde{N}_k \;:\; ||f_m - f_n|| < 2^{-k}$$

Možemo fiksirati $n = \widetilde{N}_k + 1 \equiv N_k$, pa je

$$\forall\, m \geq N_k \;:\; ||f_m - f_{N_k}|| < 2^{-k}$$

Odavde, usporednim testom, zaljučujemo da red

$$||f_{N_1}|| + ||f_{N_2} - f_{N_1}|| + ||f_{N_3} - f_{N_2}|| + \dots$$

konvergira. Neka je suma ovog reda realan broj $M > 0$. Sada tvrdimo da niz funkcija $\{g_n\}$, gdje je opći član dan s

$$g_n = |f_{N_1}| + |f_{N_2} - f_{N_1}| + |f_{N_3} - f_{N_2}| + \dots + |f_{N_n} - f_{N_{n-1}}|\,,$$

konvergira u L^p. Kao posljedicu nejednakosti trokuta imamo

$$||g_n|| \leq M$$

odnosno

$$\int g_n^p \leq M^p$$

Koristeći “Monotone Convergence Theorem” znamo da niz $\{g_n^p\}$ konvergira gotovo svugdje u pozitivnu funkciju $h \in L^1$, takvu da je

$$\int h \leq M^p$$

Dakle, niz $\{g_n\}$ konvergira gotovo svugdje u pozitivnu (mjerljivu) funkciju g, takvu da je $h = g^p$, pa je $g \in L^p$ i $||g|| \leq M$. To znači da i red

$$f_{N_1} + (f_{N_2} - f_{N_1}) + (f_{N_3} - f_{N_2}) + \dots$$

konvergira u funkciju $f \in L^p$: konvergencija slijedi usporednim testom, a inkluzija zbog

$$\infty > \int g > \int f$$

Drugim riječima, za svaki $\epsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}$, takav da je

$$||f_{N_k} - f|| < \epsilon \quad \text{i} \quad 2^{-k} < \epsilon$$

Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ imamo

$$||f_m - f|| \leq ||f_m - f_{N_k}|| + ||f_{N_k} - f|| < 2^{-k} + \epsilon < 2\epsilon$$

za sve $m \geq N_k$ i stoga $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergira u $f \in L^p$.

H
Nabla i sve to

Linearnost derivacija

$$\boldsymbol{\nabla}(f+g) = \boldsymbol{\nabla} f + \boldsymbol{\nabla} g\,, \quad \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B} \tag{H.1}$$

Derivacije produkata

$$\boldsymbol{\nabla}(fg) = g\boldsymbol{\nabla} f + f\boldsymbol{\nabla} g \tag{H.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(f\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla} f + f\,\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}\,, \quad \boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\nabla} f)\times\mathbf{A} + f\,\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \tag{H.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} \tag{H.4}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) \tag{H.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) \tag{H.6}$$

$$(\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} \tag{H.7}$$

$$(\mathbf{C}\times\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} \tag{H.8}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{C} - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{C} \tag{H.9}$$

$$(\mathbf{A}\times\boldsymbol{\nabla})\times\mathbf{B} = (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) \tag{H.10}$$

Više derivacije

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}\,, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = 0 \tag{H.11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} \tag{H.12}$$

Koordinatni sustavi

Sferni	
$x = r\sin\theta\cos\phi$	$\hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$y = r\sin\theta\sin\phi$	$\hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$z = r\cos\theta$	$\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$
$\theta = \mathrm{tg}^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z)$	$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}$
$\phi = \mathrm{tg}^{-1}(y/x)$	$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}$
Cilindrični	
$x = s\cos\phi$	$\hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$y = s\sin\phi$	$\hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$z = z$	$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$
$s = \sqrt{x^2+y^2}$	$\hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}$
$\phi = \mathrm{tg}^{-1}(y/x)$	$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}$
$z = z$	$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}$

Laméovi koeficijenti

Kao referentni koordinatni sustav ćemo uzeti Kartezijev, $\{x_1, x_2, x_3\}$ s pripadnim jediničnim vektorima $\{\hat{\mathbf{x}}_{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{(2)}, \hat{\mathbf{x}}_{(3)}\}$. Promatramo općenit koordinatni sustav $\{q_1, q_2, q_3\}$ s pripadnom koordinatnom bazom vektora $\{\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}\}$,

$$\mathbf{e}_{(i)} \equiv \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\,, \quad h_i \equiv |\mathbf{e}_{(i)}|\,, \quad \hat{\mathbf{e}}_{(i)} = \frac{\mathbf{e}_{(i)}}{h_i}$$

Motivacija:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = x_i\hat{\mathbf{x}}^i$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\cdot\boldsymbol{\nabla} \equiv \mathbf{e}_{(i)}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

Konkretno za

- Kartezijev koordinatni sustav

$$\mathbf{e}_{(x)} = \hat{\mathbf{x}}\,, \quad \mathbf{e}_{(y)} = \hat{\mathbf{y}}\,, \quad \mathbf{e}_{(z)} = \hat{\mathbf{z}}\,, \quad h_x = h_y = h_z = 1$$

- sferni koordinatni sustav,

$$\mathbf{e}_{(r)} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}\,, \quad h_r = 1$$

$$\mathbf{e}_{(\theta)} = r\cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + r\cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - r\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}\,, \quad h_\theta = r$$

$$\mathbf{e}_{(\phi)} = -r\sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}\,, \quad h_\phi = r\sin\theta$$

- cilindrični koordinatni sustav

$$\mathbf{e}_{(s)} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{s}}\,, \quad h_s = 1$$

$$\mathbf{e}_{(\phi)} = -s\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + s\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}\,, \quad h_\phi = s$$

$$\mathbf{e}_{(z)} = \hat{\mathbf{z}}\,, \quad h_z = 1$$

Jacobijan. Linijski element

$$d\boldsymbol{\ell} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i = \mathbf{e}_{(i)}\,\mathrm{d}q_i$$

Volumni element je dan izrazom

$$d\tau = |\mathbf{e}_{(3)} \cdot (\mathbf{e}_{(1)} \times \mathbf{e}_{(2)})|\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_3$$

U Kartezijevom koordinatnom sustavu imamo

$$\mathrm{d}\tau = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Potražimo vezu volumnog elementa u općenitom koordinatnom sustavu s onim u Kartezijevom,

$$\mathbf{e}_{(i)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\,\hat{\mathbf{x}}_{(j)}$$

$$\mathrm{d}\tau = |J|\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_3$$

gdje je Jacobijan determinanta

$$J(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} \partial_{q_1} x & \partial_{q_2} x & \partial_{q_3} x \\ \partial_{q_1} y & \partial_{q_2} y & \partial_{q_3} y \\ \partial_{q_1} z & \partial_{q_2} z & \partial_{q_3} z \end{vmatrix}$$

Nadalje, koristeći Laméove koeficijente,

$$J = h_1 h_2 h_3\,\hat{\mathbf{e}}_{(3)} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_{(2)}) = h_1 h_2 h_3\,\hat{\mathbf{e}}_{(3)} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{(3)} = h_1 h_2 h_3$$

U sfernom i cilindričnom koordinatnom sustavu imamo

$$J_{\mathrm{S}} = r^2 \sin\theta\,, \quad J_{\mathrm{C}} = s$$

Nabla. Promotrimo vezu s Kartezijevim koordinatnim vektorima $\{\hat{\mathbf{x}}_{(i)}\}$,

$$\hat{\mathbf{x}}_{(1)} = \hat{\mathbf{x}}\,, \quad \hat{\mathbf{x}}_{(2)} = \hat{\mathbf{y}}\,, \quad \hat{\mathbf{x}}_{(3)} = \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{(i)} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_j x_j \hat{\mathbf{x}}_{(j)} = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{x}}_{(j)}}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

Obratno,

$$\hat{\mathbf{x}}_{(i)} = \sum_j w^j_{(i)} \hat{\mathbf{e}}_{(j)}$$

$$w^j_{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{(i)} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{(j)} = \hat{\mathbf{x}}_{(i)} \cdot \sum_k \frac{\hat{\mathbf{x}}_{(k)}}{h_j} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\delta_{ik}}{h_j} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \sum_i \hat{\mathbf{x}}_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j} \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \hat{\mathbf{e}}_{(j)} \frac{\partial}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_j \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(j)}}{h_j} \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(j)}}{h_j} \frac{\partial}{\partial q_j}$$

Primjerice,

$$\boldsymbol{\nabla} f = \sum_i \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(i)}}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \tag{H.13}$$

Teorem H.1. *Vrijedi*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \big(\partial_1 (h_2 h_3 A_1) + \partial_2 (h_1 h_3 A_2) + \partial_3 (h_1 h_2 A_3) \big) \tag{H.14}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_{(i)} \partial_j (h_k A_k) \tag{H.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\partial_1 \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \partial_1 f \right) + \partial_2 \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \partial_2 f \right) + \partial_3 \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \partial_3 f \right) \right) \tag{H.16}$$

Dokaz : Prvo valja uočiti kako je

$$\boldsymbol{\nabla} q_i = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(j)}}{h_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(j)}}{h_j} \delta_{ij} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(i)}}{h_i}$$

Pri razmatranju biramo "desnu" bazu (dokazi su u potpunosti analogni za "lijeve" baze),

$$\hat{\mathbf{e}}_{(1)} = \hat{\mathbf{e}}_{(2)} \times \hat{\mathbf{e}}_{(3)}$$

Pogledajmo za početak prvi član divergencije vektorskog polja $\mathbf{A} = A_i \hat{\mathbf{e}}_{(i)}$,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (A_1 \hat{\mathbf{e}}_{(1)}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (A_1 \hat{\mathbf{e}}_{(2)} \times \hat{\mathbf{e}}_{(3)}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (A_1 h_2 h_3 \boldsymbol{\nabla} q_2 \times \boldsymbol{\nabla} q_3) =$$

$$= \boldsymbol{\nabla}(A_1 h_2 h_3) \cdot (\boldsymbol{\nabla} q_2 \times \boldsymbol{\nabla} q_3) + A_1 h_2 h_3 \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} q_2 \times \boldsymbol{\nabla} q_3)$$

S obzirom da drugi član iščezava,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} q_2 \times \boldsymbol{\nabla} q_3) = (\boldsymbol{\nabla} q_3) \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} q_2) - (\boldsymbol{\nabla} q_2) \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} q_3) = 0$$

imamo

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (A_1 \hat{\mathbf{e}}_{(1)}) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{(2)} \times \hat{\mathbf{e}}_{(3)}}{h_2 h_3} \cdot \boldsymbol{\nabla}(A_1 h_2 h_3) = \frac{1}{h_2 h_3} \hat{\mathbf{e}}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\nabla}(A_1 h_2 h_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \partial_1 (A_1 h_2 h_3)$$

Kompletan izraz za divergenciju vektorskog polja dobije se dodavanjem dva preostala, analogno izvedena člana. Laplasijan skalarne funkcije odmah slijedi uvrštavanjem $A_i = (\partial_i f)/h_i$. Za rotor vektorskog polja opet postupamo na sličan način,

$$\boldsymbol{\nabla} \times (A_1 \hat{\mathbf{e}}_{(1)}) = \boldsymbol{\nabla} \times (A_1 h_1 \boldsymbol{\nabla} u_1) = \boldsymbol{\nabla}(A_1 h_1) \times \boldsymbol{\nabla} u_1 + A_1 h_1 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} u_1 =$$

$$= -(\nabla u_1) \times \nabla(A_1 h_1) = -\frac{\hat{\mathbf{e}}_{(1)}}{h_1} \times \nabla(A_1 h_1) =$$

$$= -\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_2}\,\hat{\mathbf{e}}_{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_{(2)}\partial_2(A_1 h_1) + \frac{1}{h_3}\,\hat{\mathbf{e}}_{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_{(3)}\partial_3(A_1 h_1)\right) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\big(\mathbf{e}_{(2)}\partial_3(A_1 h_1) - \mathbf{e}_{(3)}\partial_2(A_1 h_1)\big)$$

i analogno za preostale komponente … □

Operator ∇ u različitim koordinatnim sustavima

Kartezijev

$$\nabla\psi = \hat{\mathbf{x}}\,\partial_x\psi + \hat{\mathbf{y}}\,\partial_y\psi + \hat{\mathbf{z}}\,\partial_z\psi \tag{H.17}$$

$$\nabla^2\psi = \partial_x^2\psi + \partial_y^2\psi + \partial_z^2\psi \tag{H.18}$$

Sferni

$$\nabla\psi = \hat{\mathbf{r}}\,\partial_r\psi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{1}{r}\,\partial_\theta\psi + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\phi\psi \tag{H.19}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\theta(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\phi A_\phi \tag{H.20}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\,\frac{1}{r\sin\theta}\,(\partial_\theta(\sin\theta A_\phi) - \partial_\phi A_\theta) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{1}{r}\,\big(\frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\phi A_r - \partial_r(rA_\phi)\big) +$$

$$+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{1}{r}\,(\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r) \tag{H.21}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\partial_r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\psi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial_\phi^2\psi \tag{H.22}$$

Cilindrični

$$\nabla\psi = \hat{\mathbf{s}}\,\partial_s\psi + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{1}{s}\,\partial_\phi\psi + \hat{\mathbf{z}}\,\partial_z\psi \tag{H.23}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{s}\,\partial_s(sA_s) + \frac{1}{s}\,\partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z \tag{H.24}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \big(\frac{1}{s}\,\partial_\phi A_z - \partial_z A_\phi\big)\hat{\mathbf{s}} + \big(\partial_z A_s - \partial_s A_z\big)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\big(\partial_s(sA_\phi) - \partial_\phi A_s\big)\hat{\mathbf{z}} \tag{H.25}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{s}\,\partial_s(s\,\partial_s\,\psi) + \frac{1}{s^2}\,\partial_\phi^2\,\psi + \partial_z^2\,\psi \tag{H.26}$$

I

Simetrični polinomi

Definicija I.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$, a R komutativan prsten. Za polinom

$$f \in R[x_1, \dots, x_n]$$

kažemo da je **simetričan polinom** ako za sve permutacije $\sigma_n \in S_n$ vrijedi

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Elementarni simetrični polinomi

$$\begin{aligned} s_0(x_1, \dots, x_n) &= 1 \\ s_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ s_2(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i<j}^{n} x_i x_j \\ &\vdots \\ s_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdots x_n \end{aligned}$$

Sume potencija

$$p_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

Teorem I.2 (Fundamentalni teorem simetričnih polinoma (Newton)). *Neka je R komutativan prsten. Tada se svaki simetričan polinom nad R može prikazati kao polinom elementarnih simetričnih polinoma i to na jedinstven način. Drugim riječima za svaki polinom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ postoji jedinstven polinom $g \in R[x_1, \dots, x_n]$, takav da je*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(s_1, \dots, s_n)$$

Dokaz : Indukcijom. Za $n = 1$ imamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (s_1(x))^k$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$ i promotrimo n. Sada opet primjenjujemo indukciju s obzirom na stupanj p polinoma f. Tvrdnja očigledno vrijedi za $p = 0$ (polinom je samo konstantna funkcija), pa pretpostavimo da vrijedi za $p-1$ i promotrimo polinom f stupnja p. Primjetimo sada kako je

$$\hat{f}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$$

simetričan polinom, pa po pretpostavkama postoji $g \in R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, takav da je

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(s_1, \ldots, s_{n-1})|_{x_n=0}$$

Nadalje, polinom

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_n) - g(s_1, \ldots, s_{n-1}) \in R[x_1, \ldots, x_n]$$

je simetričan, te vrijedi $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$. Kako općenito možemo pisati $\tilde{f} = x_n \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, gdje je $\tilde{f}_2$ dio polinoma koji ne sadrži faktor x_n, iz prethodnih jednakosti slijedi $\tilde{f}_2 = 0$, donosno $x_n | \tilde{f}$. Nadalje, $\tilde{f}$ je simetričan polinom, pa isto vrijedi i za bilo koji x_i, odnosno $s_n | \tilde{f}$. Drugim riječima $\tilde{f} = s_n h$, gdje je h simetričan polinom. Kako je $\deg h < \deg f$, po pretpostavci je h polinom elementarnih simetričnih polinoma s_i, pa isto vrijedi i za f. Valja još dokazati jedinstvenost. □

Teorem I.3. Newtonovi identiteti.

$$n s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_{n-k} p_k \tag{I.1}$$

Dokaz : Lako se vidi

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_n = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n)$$

i analogno

$$t^n s_0 + t^{n-1} s_1 + \cdots + t^0 s_n = (t + x_1)(t + x_2) \cdots (t + x_n)$$

Uvrštavajući redom $t = -x_1$, $t = -x_2$, …, $t = -x_n$ i zbrajanjem svih ovih jednakosti dobivamo

$$(-1)^n p_n s_0 + (-1)^{n-1} p_{n-1} s_1 + \cdots + p_0 s_n = 0$$

gdje je $p_0 = n$. □

Teorem I.4.

$$n!\,s_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ p_n & & & & & p_1 \end{vmatrix} \tag{I.2}$$

$$p_n = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2s_2 & s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3s_3 & s_2 & s_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ ns_n & & & & & s_1 \end{vmatrix} \tag{I.3}$$

DOKAZ : Korištanjem Newtonovih identiteta dobivamo sustav

$$s_1 = p_1$$

$$p_1 s_1 - 2s_2 = p_2$$

$$p_2 s_1 - p_1 s_2 + 3s_3 = p_3$$

itd. □

DZ: izrazite $\sum_{i\neq j} x_i x_j^2$ pomoću s_k (suma je jednaka $p_1p_2 - p_3$).

Korolar I.5. *Za svaku kvadratnu $n \times n$ matricu A, sa svojstvenim vrijednostima*

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

imamo

$$\det A = s_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,, \quad \mathrm{Tr}(A^k) = p_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

pa je determinantu moguće prikazati preko tragova korištenjem relacije (I.2).

Na primjer,

$$\det A_2 = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_2 & p_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2)\right)$$

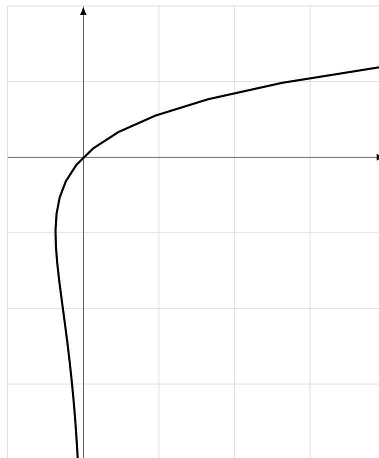
$$\det A_3 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left((\mathrm{Tr}A)^3 - 3\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(A^2) + 2\mathrm{Tr}(A^3)\right)$$

J

Lambertova W funkcija

Definicija J.1.

$$W(z)e^{W(z)} = z \tag{J.1}$$



Primjer(i) J.2. Oznaka, $z^z = {}^2z,\ z = z^{({}^{n-1}z)}$. Promotrimo dvije funkcije,

$$f(z) = {}^{\infty}z\,, \quad g(z) = \exp\Big(z\exp\big(z\exp(\dots)\big)\Big)$$

Tada je $z^f = f$, odnosno $fz^{-f} = 1$ te

$$fe^{-f\ln z} = 1$$

Množenjem s $-\ln z$ dobivamo

$$-f(z)\ln z = W(-\ln z)$$

odnosno

$$f(z) = \frac{W(-\ln z)}{-\ln z}$$

Slično tako imamo $e^{zg} = g$, odnosno

$$ge^{-zg} = 1$$

odakle, množenjem s $-z$ dobivamo

$$g(z) = \frac{W(-z)}{-z}$$

//

Primjer(i) J.3. Kosi hitac (s horizontalne podloge) u mediju s trenjem linearno proporcionalnim brzini.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -gm\hat{\mathbf{y}} - k\mathbf{v}$$

Vrijeme leta je dano s

$$T = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{C}{g} + W\left(-\frac{C}{g}\,e^{-C/g}\right)\right)$$

gdje su

$$\kappa = \frac{k}{m}\,, \qquad C = v_0 \sin\theta + \frac{g}{\kappa}$$

//

Lema J.4 (Lagrangeov inverzijski teorem). *Ako je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na okolini točke $a \in \mathbb{C}$ i $f'(a) \neq 0$, tada problem $f(w) = z$ ima rješenje $w = g(z)$ dano redom*

$$g(z) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \to a} \frac{(z - f(a))^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}w^{n-1}} \left(\frac{w - a}{f(w) - f(a)}\right)^n \tag{J.2}$$

Primjer(i) J.5. Razvoj W oko $a = 0$

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$$

Radijus konvergencije

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{n-1}}{n!}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{n}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}} = e$$

//

Bibliografija

[Arn73] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge, 1973.

[Art15] E. Artin, *Gamma Function*, Dover Publications, New York, 2015.

[AS70] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1970.

[AW12] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic, Oxford, 2012.

[BC14] R. Bronson and G. Costa, *Schaum's Outline of Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 2014.

[BR86] N. Bleistein and Handelsman R.A., *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover Publications, New York, 1986.

[BSMM04] I.N. Bronshtein, K.A. Semendyayev, G. Musiol, and H. Mühlig, *Handbook of Mathematics*, Springer, Berlin New York, 2004.

[But68] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass, 1968.

[Far93] S. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover Publications, New York, 1993.

[GF00] I.M. Gel'fand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publications, Mineola, N.Y, 2000.

[GPS02] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, San Francisco, 2002.

[HJ99] K. Hrbacek and T. Jech, *Introduction to set theory*, M. Dekker, New York, 1999.

[Jac99] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1999.

[Jef03] A. Jeffrey, *Applied Partial Differential Equations: An Introduction*, Academic Press, Amsterdam San Diego, 2003.

[Kre11] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, Hoboken, N.J., 2011.

[MBR65] D.S. Mitrinović, E.S. Barnes, and J.R.M. Radok, *Functions of a Complex Variable*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, The Netherlands, 1965.

[MK84] D.S. Mitrinović and J.D. Kečkić, *The Cauchy Method of Residues: Theory and Applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht Boston Hingham, MA, 1984.

[MM66] D.S. Mitrinović and J.H. Michael, *Calculus of Residues*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, The Netherlands, 1966.

[Nee97] T. Needham, *Visual complex analysis*, Clarendon Press Oxford University Press, Oxford New York, 1997.

[RHS06] K.F. Riley, M.P. Hobson, and Bence S.J., *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[SLSS09] M. Spiegel, S. Lipschutz, J. Schiller, and D. Spellman, *Schaum's Outline of Complex Variables*, McGraw-Hill, New York, 2009.

[Spi74] M. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.

[TP85] M. Tenenbaum and H. Pollard, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1985.